UNED

Máquinas hidráulicas
Problemas y soluciones

Julio Hernández Rodríguez
Pablo Gómez del Pino
Claudio Zanzi

Máquinas Hidráulicas

Problemas y soluciones

JULIO HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ
PABLO GÓMEZ DEL PINO
CLAUDIO ZANZI

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

MÁQUINAS HIDRÁULICAS
Problemas y soluciones

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

© *Universidad Nacional de Educación a Distancia*
Madrid 2016

www.uned.es/publicaciones

© *Julio Hernández Rodríguez, Pablo Gómez del Pino y Claudio Zanzi*

ISBN electrónico: 978-84-362-7113-3

Edición digital actualizada: junio de 2017

Índice general

Prólogo

Nomenclatura

1 Introducción. Semejanza en turbomáquinas

1.1 Curva característica de un acoplamiento en paralelo de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades
1.2 Tiempo de llenado de un depósito
1.3 Curva característica de un acoplamiento en serie de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades
1.4 Posibles disposiciones del difusor en una turbina
1.5 Velocidad específica de una turbina
1.6 Ensayo de un modelo de bomba centrífuga
1.7 Ensayo de un modelo de bomba funcionando con aire
1.8 Ensayo de un modelo de bomba centrífuga. Determinación de condiciones de semejanza
1.9 Diseño básico del difusor de una turbina
1.10 Curva característica de un acoplamiento en paralelo y en serie de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades
1.11 Determinación del número de etapas necesario en una bomba

2 Bombas centrífugas

2.1 Estimación de magnitudes características a partir de datos geométricos y la velocidad de giro
2.2 Cálculo del par de giro
2.3 Cálculo de la velocidad de giro

2.4 Cálculo de diversas magnitudes a partir de datos geométricos, la velocidad de giro y el caudal
2.5 Determinación de curvas características y punto de funcionamiento
2.6 Cálculo de rendimiento manométrico y pérdidas de energía en la voluta
2.7 Estimación de magnitudes características a partir de datos geométricos y la velocidad de giro del rodete
2.8 Bombeo de agua entre dos depósitos: cálculo de diversas magnitudes, curva característica de la instalación y punto de funcionamiento
2.9 Bomba radial con difusor de álabes. Análisis de pérdidas en rodete, difusor y voluta
2.10 Bomba de varias etapas. Análisis de condiciones de semejanza
2.11 Análisis de una bomba centrífuga (I)
2.12 Análisis de una bomba centrífuga (II)
2.13 Análisis de una bomba centrífuga (III)
2.14 Análisis de una bomba centrífuga (IV)
2.15 Determinación del tamaño del rodete
2.16 Análisis de una bomba centrífuga (V)
2.17 Curva característica ideal
2.18 Condiciones de operación para evitar cavitación en un sistema de bombeo
2.19 Análisis de una bomba centrífuga (VI)
2.20 Cálculo del ángulo de entrada de los álabes del rodete
2.21 Cálculo del ángulo de salida de los álabes del rodete (I)
2.22 Bomba radial con difusor de álabes. Efecto de variación del ángulo de entrada de los álabes del rodete
2.23 Cálculo del ángulo de salida de los álabes del rodete (II)
2.24 Análisis de una bomba centrífuga y del acoplamiento en paralelo de dos bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades
2.25 Análisis de una bomba centrífuga (VI)
2.26 Curvas características y puntos de funcionamiento singulares
2.27 Modificación del punto de funcionamiento

3 Turbinas Francis

3.1 Rendimiento de una turbina de flujo radial en función de los ángulos α_1 y β_1

3.2 Cálculo de los ángulos de salida de los álabes del distribuidor y del rodete
3.3 Cálculo de magnitudes en la sección de entrada del rodete y altura de pérdidas en el rodete
3.4 Determinación de magnitudes geométricas y análisis de pérdidas
3.5 Determinación de diversas magnitudes de funcionamiento en una turbina con difusor de forma troncocónica (I)
3.6 Cálculo de magnitudes en la sección de entrada del rodete y de la potencia en el eje
3.7 Determinación de triángulos de velocidades, ángulos de los álabes y altura de pérdidas en el rodete
3.8 Determinación de salto neto, rendimientos y geometría de los álabes
3.9 Turbina de doble rodete. Cálculo de condiciones de operación y geometría de rodete y difusor
3.10 Determinación del ángulo del distribuidor y la velocidad de giro bajo distintas condiciones de funcionamiento
3.11 Determinación de diversas magnitudes de funcionamiento en una turbina con difusor de forma tronco-cónica (II)
3.12 Regulación de una turbina de flujo radial

4 Turbinas Kaplan
4.1 Cálculo de diversas magnitudes en el rodete y el distribuidor
4.2 Rendimientos, triángulo de velocidades y presión en el difusor
4.3 Regulación de una turbina Kaplan (I)
4.4 Rangos de condiciones de funcionamiento de una turbina
4.5 Regulación de una turbina Kaplan (II)
4.6 Regulación de una turbina Kaplan (III)
4.7 Regulación de una turbina tubular
4.8 Análisis de una cascada de álabes

5 Turbinas Pelton
5.1 Condición de funcionamiento con máximo rendimiento en ausencia de pérdidas
5.2 Cálculos de los diámetros de rodete y chorro y de la velocidad de giro
5.3 Cálculo de los diámetros de rodete y chorro y de la potencia nominal
5.4 Cálculo del número de turbinas, diámetros de rodete y chorro, y caudal en una central

5.5 Alturas, rendimientos y diámetro del chorro
5.6 Influencia de las pérdidas por fricción en los álabes
5.7 Central con dos turbinas de seis chorros
5.8 Regulación de una turbina

6 Aeroturbinas
6.1 Variación con la altura sobre el terreno de la velocidad media del viento
6.2 Funciones de densidad y distribución de probabilidad en un emplazamiento
6.3 Aplicación de la teoría del disco actuador
6.4 Coeficiente de potencia, potencia en el eje y potencia nominal
6.5 Fuerzas, momentos y coeficientes de fuerza sobre una aeroturbina
6.6 Velocidad de giro variable. Factor de capacidad de un aerogenerador
6.7 Sistema de control de potencia
6.8 Interferencia entre dos aeroturbinas

Bibliografía

Apéndices

A Relación de ecuaciones
A.1 Ecuaciones de conservación en forma integral
A.1.1 Ecuación de conservación de la masa
A.1.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento
A.1.3 Ecuación de conservación de la energía
A.2 Flujos turbulentos
A.2.1 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías
A.2.2 Diagrama de Moody
A.3 Máquinas de fluidos
A.3.1 Ecuación de conservación de la energía
A.3.2 Definición de alturas y rendimientos
A.3.2.1 Bombas hidráulicas
A.3.2.2 Turbinas hidráulicas
A.3.3 Pérdidas de energía en la instalación
A.3.4 Ecuación de Euler
A.3.5 Relación entre altura útil y variación de momento cinético
A.3.6 Simplificación de la ecuación de Euler

A.3.7 Efecto de número finito de álabes en bombas centrífugas
A.3.8 Análisis dimensional y semejanza
A.3.8.1 Relaciones entre parámetros adimensionales en bombas
A.3.8.2 Relaciones entre parámetros adimensionales en turbinas
A.3.8.3 Velocidad específica
A.3.8.4 Expresiones alternativas para la velocidad específica
A.3.8.5 Clasificación de bombas y turbinas en función de la velocidad específica

Índice alfabético

Prólogo

Este texto es una edición ampliada de la segunda parte del libro *Problemas de mecánica de f uidos y máquinas hidráulicas*, editado en 1996, dedicada a máquinas hidráulicas. En esta edición se han añadido nuevos problemas, cuyo número ha pasado de 35 a 74, y se ha mantenido la estructura y las características de la primera, excepto por la adición de un nuevo capítulo sobre aeroturbinas de eje horizontal, en las que se desprecian los efectos de compresibilidad del aire y son tratadas, por tanto, como si fueran turbinas hidráulicas de flujo axial. La mayoría de los ejercicios han sido propuestos en exámenes de asignaturas del área de mecánica de fluidos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Algunos ejercicios son adaptaciones de otros que fueron propuestos en exámenes de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Murcia durante el periodo de estancia de uno de los autores en dicha Universidad.

Se han agrupado los problemas en seis capítulos, teniendo en cuenta la materia principal de la que tratan. En algunos casos, el contenido del problema se corresponde con materias de varios capítulos, aunque se ha procurado que, en la medida de lo posible, su resolución no requiera el conocimiento de materias de capítulos posteriores. Se ha dado un título a cada problema con objeto de facilitar su identificación, a pesar de que ello puede resultar impreciso en algunos casos. Para la mayoría de los problemas y ejercicios se presentan procedimientos de resolución detallados. En algunos casos se indican esquemáticamente los pasos a seguir y en otros se dan sugerencias para la resolución. En todos ellos se da la solución numérica. Se ha incluido un apéndice, un apartado de nomenclatura y un índice alfabético de materias. El apéndice contiene una mera relación de ecuaciones frecuentemente utilizadas en la resolución de los problemas.

La publicación de esta colección de problemas responde a una petición reiterada de los alumnos de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la UNED de disponer

de un mayor número de ejercicios resueltos que hayan sido propuestos en exámenes de cursos anteriores. A ellos va, por tanto, principalmente dirigido este texto. Los problemas que se presentan tienen un grado de dificultad variable, generalmente moderado, y pueden ser de cierta utilidad en una etapa inicial en la que, después de haber estudiado los conceptos teóricos, el estudiante se dispone a resolver los primeros ejercicios. Sin embargo, es obvio que, para conseguir una adecuada asimilación de los conceptos y adquirir los recursos necesarios para resolver eficazmente problemas, se requiere abordar y resolver sin ayuda un número suficiente de ejercicios para los que no se disponga del procedimiento de resolución. Enfrentarse al mayor número posible de problemas es generalmente útil, pero lo realmente esencial es conseguir *resolver* problemas, no solo dar el primer paso de intentarlo. Tras sucesivos intentos, más o menos prolongados, de resolver un cierto número de ejercicios (seguidos, en su caso, de la consulta o el análisis del procedimiento de resolución), es imprescindible conseguir llegar a resolver un porcentaje significativo de problemas sin ayuda. Para ello, es importante no "repasar" problemas ya abordados pero que nunca se llegó a resolver, sino intentar resolverlos transcurridos unos días.

Antes de realizar los problemas que aquí se presentan es necesario que el lector haya estudiado los conceptos teóricos con un nivel similar al que habitualmente se utiliza en asignaturas de grado sobre máquinas hidráulicas en escuelas de ingeniería.

Los autores

Madrid, septiembre 2015

Nomenclatura

Los vectores son representados por caracteres en negrita (ocasionalmente, en notación mediante índices).[1] El módulo de un vector se denota generalmente por el símbolo correspondiente en cursiva (p. ej.: $M = |\boldsymbol{M}|$). Las componentes del vector velocidad en coordenadas cilíndricas se denotan en general por v_r, v_u y v_x (se utiliza v_u en lugar de v_θ al ser el vector velocidad de arrastre $\boldsymbol{u} = u\,\boldsymbol{e}_\theta$, siendo θ la coordenada acimutal). La velocidad en planos meridianos es $\boldsymbol{v}_m = v_r\,\boldsymbol{e}_r + v_x\,\boldsymbol{e}_x$, de forma que $v_m = v_r$ en máquinas de flujo radial y $v_m = v_x$ en máquinas de flujo axial. Tanto en máquinas de flujo radial como en las de flujo axial se utilizará preferentemente v_m para denotar la velocidad meridiana, aunque en las primeras esta componente se denotará también por v_r en algunos problemas. La notación empleada para definir los triángulos de velocidades se indica en el Problema 2.1.

Caracteres latinos

a	coeficiente de velocidad inducida axial
a'	coeficiente de velocidad inducida angular
A	área
b	anchura de los álabes
c	calor específico
c	cuerda de un perfil
c	factor de escala en la distribución de Weibull
C_D	coeficiente de resistencia
C_L	coeficiente de sustentación

[1] Aunque por razones de claridad se ha optado por utilizar caracteres en negrita ($\boldsymbol{v}$) para denotar vectores, como suele hacerse actualmente en la mayoría de los textos impresos, es importante tener en cuenta que en textos manuscritos debe hacerse constar el carácter vectorial de las magnitudes utilizando, por ejemplo, una flecha ($\vec{v}$) o una barra ($\overline{v}$) sobre el correspondiente símbolo.

C_p	coeficiente de potencia
C_v	coeficiente de velocidad en el inyector de una turbina Pelton
d	diámetro
D	diámetro
e	energía interna específica
$\boldsymbol{e}$	vector unitario
$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_x$	vectores unitarios de la base en el sistema de coordenadas cilíndricas
E	fuerza de empuje
f	factor de fricción
f	frecuencia
$\boldsymbol{f}_m$	fuerza másica por unidad de masa
$\boldsymbol{f}_s$	fuerza de superficie por unidad de área
F_C	factor de capacidad de un aerogenerador
$\boldsymbol{F}$	fuerza
$\boldsymbol{F}_s$	resultante de las fuerzas de superficie
$\boldsymbol{F}_v$	resultante de las fuerzas de volumen
$\boldsymbol{g}$	aceleración de la gravedad[2]
h	altura
H	altura
H_g	altura geométrica
H_L	altura de pérdidas internas en una turbomáquina
$H_{L,\mathrm{d}}$, $H_{L,\mathrm{r}}$, $H_{L,\mathrm{v}}$	alturas de pérdidas internas en difusor, rodete y voluta
H_m	altura manométrica
H_n	salto neto
H_u	altura útil, salto útil
H_{uz}	altura útil teniendo en cuenta el efecto de número finito de álabes
$H_{u\infty}$	altura útil correspondiente a un número infinito de álabes
H_φ	altura de pérdidas en la instalación
ΔH	altura que proporciona ($-H_m$) o extrae (H_n) una máquina, ecuación (A.1.16)
k	factor de forma en la distribución de Weibull
K	coeficiente de pérdida de carga local

[2] En la mayoría de los problemas se ha tomado $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, aunque no en todos. Téngase en cuenta que utilizar en algunos problemas el valor de $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, por ejemplo, puede introducir cambios significativos en los resultados numéricos.

K_u, K_{v_1}	coeficientes característicos de velocidad en turbinas; $u/\sqrt{2gH_n}$, $v_1/\sqrt{2gH_n}$
L	longitud
$\dot{m}$	flujo másico
$\boldsymbol{M}$	momento de fuerzas
M_x	par de giro
n	velocidad de giro (en rpm)
$\boldsymbol{n}$	vector unitario normal (saliente) a la superficie de control
n_e	velocidad de giro del generador eléctrico (en rpm)
n_q	velocidad específica en bombas (no adimensional)
n_s	velocidad específica en turbinas (no adimensional)
N	número de pares de polos del alternador
N_e	número de etapas
N_t	número de turbinas
$(\text{NPSH})_d$	altura neta de succión disponible
$(\text{NPSH})_r$	altura neta de succión requerida
p	presión
p_{at}	presión atmosférica
p_v	presión de vapor
Δp_t	$\rho g H$ ($H = H_m$ o H_n)
Q	caudal
Q	caudal de impulsión de una bomba; caudal en la entrada de una turbina
Q_a	caudal en la aspiración de una bomba
Q_f, Q_{fi}, Q_{fe}	caudal de fugas total, interno y externo
Q_r	caudal a través del rodete
$\dot{\overline{Q}}$	calor transmitido a una máquina de fluido por unidad de tiempo
r	coordenada radial
r_t	relación de transmisión del multiplicador
Re	número de Reynolds
S_c	superficie de control
S_f	superficies fijas
S_m	superficies móviles
t	tiempo
T	temperatura
u	módulo del vector velocidad de arrastre
$\boldsymbol{u}$	vector velocidad de arrastre
u_p	velocidad de punta de pala
u^*	velocidad de fricción turbulenta

v	módulo del vector velocidad absoluta
$\boldsymbol{v}$	vector velocidad absoluta
v_a	velocidad del viento de arranque de una aeroturbina
$\boldsymbol{v}_c$	velocidad de la superficie de control
v_m	componente meridiana del vector velocidad absoluta
v_n	velocidad del viento nominal de una aeroturbina
v_p	velocidad del viento de parada de una aeroturbina
v_r	componente radial del vector velocidad absoluta
v_u	componente acimutal del vector velocidad absoluta
v_x	componente axial del vector velocidad absoluta
v_θ	componente acimutal del vector velocidad absoluta
V	velocidad media del viento incidente
V_c	volumen de control
V_f	volumen fluido
w	módulo del vector velocidad relativa
$\boldsymbol{w}$	vector velocidad relativa
w_m	componente meridiana del vector velocidad relativa
w_r	componente radial del vector velocidad relativa
w_u	componente acimutal del vector velocidad relativa
$\dot{W}$	potencia
$\overline{\dot{W}}$	potencia mecánica comunicada a un volumen fluido (potencia útil)
$\dot{W}_e$	potencia eléctrica
$\dot{W}_o$	potencia de pérdidas orgánicas
$\dot{W}_u$	potencia útil
$\dot{W}_t$	potencia en el eje de la máquina
x	coordenada en sistema cilíndrico
$\boldsymbol{x}$	vector de posición
z	coordenada cartesiana en dirección vertical
z_a	altura de aspiración
Z	número de álabes del rodete

Caracteres griegos

α	ángulo que forman las velocidades absoluta y de arrastre
α	ángulo de ataque (aeroturbinas)
β	ángulo de los álabes del rodete
β	ángulo que forman las velocidades relativa y de arrastre en las secciones de entrada o salida del rodete
β	ángulo de paso de las palas (aeroturbinas)

β'_2	ángulo que forman las velocidades relativa y de arrastre en la sección de salida del rodete de una bomba, cuando no coincide con el ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida
ϵ	coeficiente de corrección de Stodola
ε	rugosidad absoluta
η	rendimiento
η_e	rendimiento eléctrico
η_h	rendimiento hidráulico
η_m	rendimiento manométrico
η_{mul}	rendimiento del multiplicador, rendimiento orgánico (en aeroturbinas)
η_o	rendimiento mecánico u orgánico
η_t	rendimiento total
η_v	rendimiento volumétrico
θ	coordenada acimutal
θ	ángulo de torsión de un elemento de pala de una aeroturbina (ángulo entre la línea de cuerda y el plano del rotor)
λ	velocidad específica (velocidad de punta de pala/velocidad del viento)
μ	coeficiente de disminución de trabajo en bombas
μ	viscosidad dinámica
ξ	relación u/v_1 en turbinas Pelton
ρ	densidad
ϕ	ángulo de incidencia (ángulo entre la velocidad del viento relativa al elemento de pala de una aeroturbina y el plano del rotor)
Φ_v	función de disipación viscosa
$\overline{\Phi}_v$	potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas en una máquina
χ	coeficiente definido en la ecuación (A.3.57)
ψ	coeficiente en la correlación de Pfleiderer, ecuación (A.3.58)
ω_q	velocidad específica en bombas (adimensional)
ω_s	velocidad específica en turbinas (adimensional)
$\boldsymbol{\Omega}$	velocidad angular

Subíndices

e	sección de entrada a la máquina

e	eléctrico (potencia, rendimiento, velocidad de giro del alternador)
$e0$	sección de entrada a la instalación
n	componente en dirección de $\boldsymbol{n}$
n	nominal
s	sección de salida de la máquina
$s0$	sección de salida de la instalación
0	sección de entrada al distribuidor
0	sección con viento sin perturbar aguas arriba de una aeroturbina
1	sección de entrada al rodete
1	sección inmediatamente aguas arriba de una aeroturbina
2	sección de salida del rodete
2	sección inmediatamente aguas abajo de una aeroturbina
3	sección de salida del difusor (en algunos problemas, denota sección de entrada al difusor, en cuyo caso el subíndice 4 denota la sección de salida)
3	sección final de la zona de expansión, aguas abajo de una aeroturbina
4	en algunos problemas, sección de salida del difusor

Superíndices

$'$	velocidad en la sección de salida del rodete de una bomba cuando el flujo no es perfectamente guiado por los álabes (ver Apéndice A.3.7)
$\overline{}$	valor medio

Capítulo 1

Introducción. Semejanza en turbomáquinas

Problema 1.1. Curva característica de un acoplamiento en paralelo de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades

Supóngase que la curva característica de una bomba, para una cierta velocidad de giro Ω, puede aproximarse por la expresión siguiente (Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y H en m):

$$H = H_0\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right); \quad H_0 = 20 \text{ m}, \; Q_0 = 0{,}30 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.$$

Determinar[1] la curva característica del acoplamiento en paralelo de dos bombas idénticas a la mencionada, una de ellas girando a la velocidad de giro Ω y la otra a una velocidad 2Ω. Determinar las posibles condiciones para las cuales alguna de las bombas del acoplamiento no funcionaría.

[1] A lo largo de todo el texto se utilizará generalmente el infinitivo para hacer referencia a lo que se pide determinar o calcular en cada problema, debiéndose sobreentender expresiones del tipo *Se debe calcular... / Se pide determinar... / Se trata de determinar...*

Solución

Si (H_1, Q_1) es un cierto punto de funcionamiento de la bomba girando a una velocidad $\Omega_1 = \Omega$, las condiciones del punto de funcionamiento (H_2, Q_2), semejante al anterior y correspondiente a una velocidad de giro de la bomba $\Omega_2 = 2\Omega$, deberán ser tales que se cumpla (igualdad de números adimensionales de la ecuación (A.3.60), despreciando efectos de viscosidad y, por tanto, prescindiendo del número de Reynolds)

$$\frac{H_1}{\Omega_1^2} = \frac{H_2}{\Omega_2^2}, \quad \frac{Q_1}{\Omega_1} = \frac{Q_2}{\Omega_2},$$

es decir,

$$H_1 = \frac{H_2}{4}, \quad Q_1 = \frac{Q_2}{2}. \tag{1.1.1}$$

Cada punto de funcionamiento de la bomba, cuando esta gira a una velocidad de giro Ω, satisface

$$H_1 = H_0 \left(1 - \frac{Q_1}{Q_0}\right),$$

y el correspondiente punto de funcionamiento semejante cuando la bomba gira a velocidad 2Ω, debe satisfacer (teniendo en cuenta (1.1.1))

$$\frac{H_2}{4} = H_0 \left(1 - \frac{Q_2}{2\,Q_0}\right);$$

por tanto,

$$H = 4H_0 \left(1 - \frac{Q}{2\,Q_0}\right),$$

es la curva característica de la bomba para una velocidad de giro 2Ω.

Despejando Q en las curvas características correspondientes a las velocidades de giro Ω y 2Ω, resulta

$$Q_1 = Q_0 \left(1 - \frac{H}{H_0}\right),$$

$$Q_2 = 2\,Q_0 \left(1 - \frac{H}{4H_0}\right).$$

La curva característica del acoplamiento en paralelo se obtendrá sumando, para cada altura H, los caudales Q_1 y Q_2 correspondientes a las dos bombas:

$$\boxed{Q_{||} = Q_1 + Q_2 = 3\,Q_0 \left(1 - \frac{H}{2H_0}\right).}$$

Para $H > H_0$, la bomba que gira a velocidad Ω no puede funcionar. (Justifíquese.)

Problema 1.2. Tiempo de llenado de un depósito

La bomba utilizada para llenar el depósito de la instalación de la figura, inicialmente vacío y con una sección horizontal de área A, tiene la siguiente curva característica para una cierta velocidad de giro n:

$$H = H_0 \left[1 - (Q/Q_0)^2\right].$$

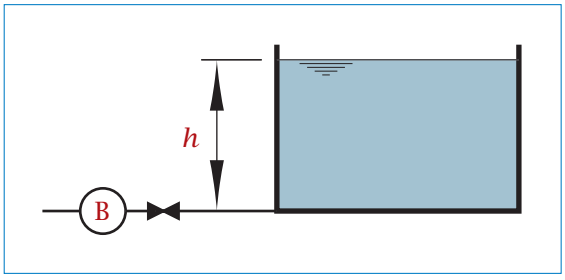
La pérdida de altura en la instalación viene dada por

$$H_\varphi = CQ^2.$$

La tubería de aspiración toma el agua desde un depósito abierto a la atmósfera, en el que la superficie libre del agua está al mismo nivel que el fondo del depósito que se llena. Las magnitudes H_0, Q_0 y C son constantes.

a) Expresar en forma adimensional el tiempo necesario para que el líquido alcance en el depósito una altura h. Hacer aplicación a un caso con $H_0 = 36$ m, $Q_0 = 0{,}3$ m^3 s^{-1}, $C = 500$ s^2 m^{-5}, $A = 1$ m^2 y $h = 20$ m.

b) Determinar la nueva curva característica de la bomba si se la hace girar a una velocidad igual a $2n$.



Solución

a) Introduciendo $H_g = h$ y las expresiones para $H_m = H$ y H_φ del enunciado en la ecuación (A.3.35), sustituyendo

$$Q = A\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

e integrando la expresión resultante desde $h = 0$ hasta un valor genérico h, resulta

$$\boxed{t^* = 2K\left[1 - (1 - h^*)^{1/2}\right],}$$

donde

$$t^* = \frac{Q_0}{H_0 A}\, t,$$

$$h^* = \frac{h}{H_0},$$

$$K = \left(1 + C\,\frac{Q_0^2}{H_0}\right)^{1/2}.$$

Sustituyendo los valores del enunciado, para $h = 20$ m, se obtiene $t^* = 1$ y

$$\boxed{t = 120 \text{ s}.}$$

b) Siguiendo un razonamiento análogo al del Problema 1.1, se obtiene

$$\boxed{H = 144\left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}6}\right)^2\right]}$$

(Q en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y H en m).

Problema 1.3. Curva característica de un acoplamiento en serie de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades

La curva característica de una bomba, para una cierta velocidad de giro n, es la siguiente (Q en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y H en m):

$$H = H_0\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2\right]; \quad H_0 = 20 \text{ m}, \; Q_0 = 0{,}20 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.$$

Determinar la curva característica correspondiente al acoplamiento en serie de tres bombas idénticas a la mencionada, girando una de ellas a una velocidad $2n$ y las otras dos a la velocidad n.

Solución

Demostrar que la curva característica de la bomba que gira a velocidad $2n$ es

$$H_{2n} = 4H_0 \left\{1 - [Q/(2\,Q_0)]^2\right\},$$

y la del conjunto de las tres bombas en serie,

$$H_T = 4H_0 \left[1 - \left(\frac{Q}{2\,Q_0}\right)^2\right] + 2H_0 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2\right],$$

de donde resulta

$$\boxed{H_T = 120 - 1500\,Q^2}$$

(Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y H en m).

Determínese el rango de posibles condiciones de funcionamiento del acoplamiento.

Problema 1.4. Posibles disposiciones del difusor en una turbina

Considérense las tres configuraciones siguientes de una misma turbina de eje vertical, que tiene un rodete con sección de salida de diámetro $D_2 = 1{,}8$ m:

a) El rodete descarga a la atmósfera.

b) El difusor es una tubería recta de diámetro $D_2 = 1{,}8$ m.

c) El difusor es un conducto recto divergente de diámetros de entrada y salida $D_2 = 1{,}8$ m y $D_3 = 3$ m, respectivamente.

En los tres casos el caudal es $Q = 20\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$, la altura de la sección de salida del rodete sobre el canal de descarga es $H = 5$ m y se supondrá el mismo rendimiento total de la turbina $\eta_t = 0{,}85$. En la brida de unión de la voluta a la tubería forzada (sección 0), de diámetro interior $D_0 = 1{,}8$ m, existe una presión manométrica $p_0 = 15\ \mathrm{kgf\,cm^{-2}}$. Calcular en los tres casos el salto neto y la potencia en el eje desarrollada por la turbina. En los casos b) y c), se supondrán despreciables las pérdidas de energía dentro del difusor. Despréciese la diferencia de cotas entre las secciones de entrada a la turbina y salida del rodete. Indicar en qué caso existirá mayor peligro de cavitación.

Solución

a) El salto neto

$$H_n = \frac{p_0 - p_2}{\rho g} + \frac{v_0^2 - v_2^2}{2g} + z_0 - z_2$$

(los subíndices 0 y 2 denotan las secciones de entrada a la turbina y salida del rodete, respectivamente), siendo $p_2 = 0$, $v_0 = v_2$ (al ser $D_0 = D_2$) y $z_0 \approx z_2$, obteniéndose[2]

$$\boxed{H_n = 150 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{\dot{W}_t = \eta_t \rho g H_n Q = 25{,}02 \text{ MW}.}$$

b) En los casos b) y c),

$$H_n = \frac{p_0 - p_4}{\rho g} + \frac{v_0^2 - v_3^2}{2g} + z_0 - z_4 \tag{1.4.1}$$

(los subíndices 3 y 4 denotan la sección de salida del difusor y la superficie libre en el canal de descarga, respectivamente).[3] En el caso de este apartado, $p_4 = 0$, $v_0 = v_3$ (al ser $D_0 = D_3$) y $z_0 - z_4 = 5$ m, obteniéndose

$$\boxed{H_n = 155 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{\dot{W}_t = 25{,}85 \text{ MW}.}$$

c) En este caso, en la ecuación (1.4.1), $p_4 = 0$, $v_0 = Q/(\pi D_0^2/4) = 7{,}86 \text{ m s}^{-1}$, $v_3 = Q/(\pi D_3^2/4) = 2{,}83 \text{ m s}^{-1}$ y $z_0 - z_4 = 5$ m, resultando

$$\boxed{H_n = 157{,}7 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{\dot{W}_t = 26{,}31 \text{ MW}.}$$

Existirá mayor peligro de cavitación en la instalación del caso c), en la que se alcanzan presiones menores a la salida del rodete.

[2] En general, el número de cifras significativas que se proporcionan en las soluciones numéricas de algunos problemas puede ser superior al que razonablemente se requeriría para considerar los resultados suficientemente precisos (por ejemplo, tres cifras significativas o incluso dos en el valor de un rendimiento podrían ser suficientes en la mayoría de los casos). Esto se ha hecho en algunos casos para facilitar la comprobación de que tanto el planteamiento como las operaciones numéricas y de cambio de unidades se han realizado correctamente, sobre todo en los problemas en los que solo se facilitan las soluciones numéricas.

[3] Obsérvese que $v_3^2/2g$ es la altura correspondiente a la pérdida en el canal de descarga de la energía cinética del chorro que sale del difusor.

Problema 1.5. Velocidad específica de una turbina

Una turbina hidráulica desarrolla una potencia de 25,60 MW bajo un salto neto de 9,6 m y girando a una velocidad de 62,5 rpm en el punto de funcionamiento de máximo rendimiento. Determinar la velocidad específica e indicar el tipo de turbina de que se trata.

Solución

Sustituyendo valores en la ecuación (A.3.69),

$$\omega_s = \Omega \frac{\dot{W}^{1/2}\rho^{3/4}}{(\Delta p)^{5/4}} = 62{,}5\,\frac{2\pi}{60}\,\frac{(25{,}60\times 10^6)^{1/2}(1000)^{3/4}}{[(9{,}6)(9{,}81)(1000)]^{5/4}},$$

resulta

$$\boxed{\omega_s = 3{,}57.}$$

La turbina es probablemente de tipo axial (consúltese la Tabla A.3 del Apéndice A.3.8.3, teniendo en cuenta que la velocidad específica no adimensional $n_s \approx 193\,\omega_s$).

Problema 1.6. Ensayo de un modelo de bomba centrífuga

Un modelo a escala reducida de un prototipo de bomba centrífuga ha sido ensayado en el laboratorio a una velocidad de giro $n_1 = 2950$ rpm, habiéndose obtenido los siguientes resultados en el punto de funcionamiento de máximo rendimiento: $H_1 = 75$ m, $Q_1 = 0{,}05$ m^3 s^{-1} y $\eta = 0{,}76$. El prototipo deberá operar en un punto de funcionamiento semejante al anterior del modelo, con un caudal $Q_2 = 0{,}45$ m^3 s^{-1} y una altura manométrica $H_2 = 117$ m.

Determinar:

a) Relación entre tamaños de prototipo y modelo, D_2/D_1.

b) Velocidad n_2 a la que deberá girar el prototipo.

c) Potencia consumida por el prototipo.

Solución

a) Despreciando los efectos de viscosidad, los dos primeros números adimensionales que aparecen en la ecuación (A.3.60) deben ser iguales en las condiciones de funcionamiento semejantes de modelo y prototipo:

$$\frac{Q_1}{D_1^3 n_1} = \frac{Q_2}{D_2^3 n_2},$$

$$\frac{H_1}{D_1^2 n_1^2} = \frac{H_2}{D_2^2 n_2^2}.$$

Despejando n_1/n_2 en estas ecuaciones,

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^6, \tag{1.6.1}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2,$$

y eliminando n_1/n_2, se obtiene

$$\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{1/2} \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{1/4} = \left(\frac{0{,}45}{0{,}05}\right)^{1/2} \left(\frac{75}{117}\right)^{1/4},$$

de donde resulta

$$\boxed{\frac{D_2}{D_1} = 2{,}68.}$$

b) Introduciendo el anterior resultado en la ecuación (1.6.1), se obtiene

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = \frac{0{,}05}{0{,}45}(2{,}68)^3 = 2{,}15,$$

de donde se determina

$$\boxed{n_2 = 1373 \text{ rpm}.}$$

c) La potencia consumida por el prototipo es

$$\dot{W}_2 = \rho Q_2 g H_2 \frac{1}{\eta}$$

(explíquese por qué el rendimiento del prototipo utilizado en esta expresión es igual al rendimiento máximo del modelo). Sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{\dot{W}_2 = 678{,}9 \text{ kW}.}$$

Problema 1.7. Ensayo de un modelo de bomba funcionando con aire

Una bomba impulsa un caudal de agua $Q_1 = 15\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ bajo una altura manométrica $H_1 = 20$ m, girando a una velocidad Ω en el punto de máximo rendimiento. Determinar el caudal, Q_2, y la altura manométrica, H_2, proporcionados por un modelo a escala 1:3 de la bomba anterior, que se hace funcionar con aire, a la misma velocidad de giro Ω, en el punto de máximo rendimiento. Indicar de qué tipo de bomba se trata. Indicar qué implicaciones tiene realizar el ensayo de la bomba con aire.

Solución

Despreciando los efectos de viscosidad, los dos primeros números adimensionales que aparecen en la ecuación (A.3.60) deben ser iguales en las condiciones de funcionamiento descritas de modelo y prototipo, que son semejantes al corresponder al punto de máximo rendimiento:

$$\frac{Q_1}{D_1^3\Omega} = \frac{Q_2}{D_2^3\Omega},$$

$$\frac{H_1}{D_1^2\Omega^2} = \frac{H_2}{D_2^2\Omega^2}.$$

De la primera ecuación, resulta

$$\boxed{Q_2 = (15)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}5556\ \mathrm{m^3\,s^{-1}},}$$

y de la segunda,

$$\boxed{H_2 = (20)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2{,}222\ \mathrm{m}.}$$

Sería necesario conocer la velocidad de giro de la bomba para determinar su velocidad específica, parámetro que podría dar una indicación del tipo de bomba de que se trata.

Problema 1.8. Ensayo de un modelo de bomba centrífuga. Determinación de condiciones de semejanza

Se quiere diseñar un prototipo de bomba centrífuga para un caudal $Q_1 = 6\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y una altura $H_1 = 120$ m, con una velocidad de giro $n_1 = 450$ rpm. Se va a construir un modelo a escala que funcione con un caudal $Q_2 = 0{,}15\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y un consumo de potencia $\dot{W}_2 = 150$ kW. Se supondrá un rendimiento $\eta = 0{,}88$ en el punto de funcionamiento nominal. Calcular la velocidad de giro del modelo, n_2, y la relación de tamaños de prototipo y modelo, D_1/D_2. Supóngase que, una vez construido el modelo, se le hace funcionar bajo una altura de 100 m; determinar si es posible, bajo alguna condición de funcionamiento, conseguir que el modelo suministre un caudal de $0{,}25\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ manteniendo el rendimiento nominal.

Solución

Teniendo en cuenta que

$$\dot{W}_2 = \frac{1}{\eta}\,\rho Q_2 g H_2,$$

puede obtenerse

$$H_2 = \frac{(150\times 10^3)(0{,}88)}{(1000)(0{,}15)(9{,}81)} = 89{,}70\ \text{m}.$$

Despreciando los efectos de viscosidad, los dos primeros números adimensionales que aparecen en la ecuación (A.3.60) deben ser iguales en las condiciones de funcionamiento semejantes de prototipo y modelo:

$$\frac{Q_1}{D_1^3 n_1} = \frac{Q_2}{D_2^3 n_2};\quad \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^6, \tag{1.8.1}$$

$$\frac{H_1}{D_1^2 n_1^2} = \frac{H_2}{D_2^2 n_2^2};\quad \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2.$$

Eliminando n_1/n_2 entre estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{1/2}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{1/4} = \left(\frac{0{,}15}{6}\right)^{1/2}\left(\frac{120}{89{,}7}\right)^{1/4},$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\frac{D_1}{D_2} = 5{,}881,}$$

e introduciendo este resultado en la ecuación (1.8.1), resulta

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = \frac{6}{0{,}15}(0{,}17)^3 = 0{,}1967,$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{n_2 \approx 2288 \text{ rpm.}}$$

Para que el punto de funcionamiento definido por

$$H_2' = 100 \text{ m},$$
$$Q_2' = 0{,}25 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1},$$
$$n_2',$$

sea semejante al correspondiente a

$$H_2 = 89{,}70 \text{ m},$$
$$Q_2 = 0{,}15 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1},$$
$$n_2 = 2288 \text{ rpm},$$

debe cumplirse

$$\frac{Q_2'}{n_2'} = \frac{Q_2}{n_2},$$
$$\frac{H_2'}{n_2'^2} = \frac{H_2}{n_2^2},$$

lo que puede comprobarse que no es posible para ningún valor de n_2' ($Q_2'^2/H_2' \neq Q_2^2/H_2$).

Problema 1.9. Diseño básico del difusor de una turbina

Una turbina de eje vertical, por la que circula un caudal $Q = 20 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}$, gira a una velocidad $n = 250$ rpm y tiene un rendimiento $\eta_t = 0{,}85$. En la brida de unión de la voluta a la tubería forzada, de diámetro interior $D_1 = 1{,}8$ m, existe una presión manométrica $p_1 = 15 \text{ kgf cm}^{-2}$. La altura de la sección de salida del rodete sobre el canal de descarga es $H = 5$ m. El diámetro de la sección de entrada del difusor (tubo recto de sección divergente) debe ser $D_{d1} = 1{,}6$ m. En estudios realizados en una turbina modelo se ha comprobado que el valor límite del coeficiente de Thoma, por debajo del cual se produce cavitación

en el interior de la máquina, viene determinado por la correlación

$$\sigma_c = 9{,}453 \times 10^{-5} n_s^{1{,}283}.$$

La altura de pérdidas de energía en el difusor se estima en

$$H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}3\, v_{d2}^2/(2g)$$

($H_{L,\mathrm{d}}$ en m y v_{d2} en m s^{-1}), siendo v_{d2} la velocidad del agua a la salida de este. Se supondrá despreciable la diferencia de cotas entre las secciones de entrada a la turbina y salida del rodete. La presión atmosférica es de 1 kgf cm^{-2} y la temperatura del agua, 15° (presión de saturación del vapor: 0,017 bar).

a) Diseñar la forma geométrica del difusor de la turbina de forma que se alcance una potencia en el eje $\dot{W}_t = 26$ MW.

b) Determinar el rendimiento del difusor.

c) Indicar el tipo de turbina de que se trata.

d) Determinar la presión en la sección de entrada al difusor.

e) Determinar la máxima altura de aspiración y la presión mínima requerida en la sección de entrada al difusor para que no se produzca cavitación en el interior de la turbina.

Solución

a) Fijado el diámetro de entrada al tubo difusor, el diseño de este viene determinado por el diámetro de su sección de salida. Aplicando un balance de energía mecánica específica entre un punto situado en la sección de entrada de la voluta y un punto situado en la superficie libre en el canal de descarga, denotados con los subíndices $v1$ y 0, respectivamente,

$$\left(\frac{p_{v1}}{\rho g} + \frac{v_{v1}^2}{2g} + z_{v1}\right) - \left(\frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0\right) = H_n + \frac{v_{d2}^2}{2g}, \tag{1.9.1}$$

donde $z_{v1} - z_0 \approx 5$ m (se ha despreciado la diferencia de cotas entre las secciones de entrada de la voluta y del difusor), $p_0 = 0$, $v_0 = 0$, $v_{v1} = 4Q/(\pi D_1^2) = 7{,}860$ m s^{-1} y el salto neto, $H_n = \dot{W}_t/(\rho g Q \eta_t) = 155{,}9$ m. El último término de la ecuación (1.9.1) representa la altura de pérdidas correspondiente a la energía cinética del agua a la salida del difusor, que no se ha incluido en el salto neto. Despejando en dicha ecuación, se obtiene $v_{d2} = 6{,}637$ m s^{-1}. A partir de este

valor y el del caudal, se obtiene el diámetro de la sección de salida del difusor,

$$\boxed{D_{d2} = 1{,}959 \text{ m}.}$$

b) El rendimiento del difusor se suele definir como sigue:[4]

$$\eta_d = \frac{(v_{d1}^2 - v_{d2}^2)/(2g) - H_{L,\mathrm{d}}}{(v_{d1}^2 - v_{d2}^2)/(2g)}, \tag{1.9.2}$$

siendo $v_{d1} = 4\,Q/(\pi D_{d1}^2) = 9{,}947 \text{ m s}^{-1}$. Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\eta_d = 0{,}759.}$$

c) La velocidad específica de la turbina es

$$n_s = n\frac{[\dot{W}_t/(735)]^{1/2}}{H_n^{5/4}} = 85{,}35. \tag{1.9.3}$$

Se trata de una turbina Francis lenta.

d) Aplicando un balance de energía mecánica específica entre un punto situado en la sección de entrada al difusor, denotada por el subíndice $d1$, y un punto situado en la superficie libre en el canal de descarga, resulta

$$\left(\frac{p_{d1}}{\rho g} + \frac{v_{d1}^2}{2g} + z_{d1}\right) - z_0 = H_{L,\mathrm{d}} + \frac{v_{d2}^2}{2g}, \tag{1.9.4}$$

donde $z_{d1} - z_0 = 5$ m y $H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}6735$ m. Despejando de la ecuación anterior, se obtiene la presión a la entrada del difusor,

$$\boxed{p_{d1} = -69{,}89 \text{ kPa}.}$$

e) La máxima altura de aspiración, $z_{a,\mathrm{máx}}$, se obtiene en función del coeficiente de Thoma mediante la expresión,

$$z_{a,\mathrm{máx}} = \frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \sigma_c H_n, \tag{1.9.5}$$

siendo $\sigma_c = 0{,}0284$ (valor obtenido de la correlación proporcionada en el enunciado). Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{z_{a,\mathrm{máx}} = 5{,}399 \text{ m}.}$$

[4] Obsérvese que el denominador de la ecuación (1.9.2) es la disminución en altura de presión a la salida del rodete que se conseguiría gracias a la forma divergente del difusor si no existiesen pérdidas de energía en este, y el numerador es la disminución que realmente se consigue con la instalación del difusor sin contar la altura geométrica recuperada.

El margen de seguridad, $\Delta\sigma$, se deduce de

$$z_a = \frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - (\sigma_c + \Delta\sigma)H_n, \tag{1.9.6}$$

donde $z_a = 5$ m. Despejando, se obtiene $\Delta\sigma = 2{,}560 \times 10^{-3}$, que corresponde a un incremento en la altura de aspiración

$$\Delta z_a = \Delta\sigma H_n = 0{,}399 \text{ m},$$

y una presión mínima en la sección de entrada al difusor

$$\boxed{p_{d1,\text{mín}} = p_{d1} - \rho g \Delta\sigma H_n = -73{,}81 \text{ kPa}}$$

(obsérvese que esta sería la presión que habría en la sección de entrada al difusor si la altura de aspiración fuese $z_{a,\text{máx}}$).

Problema 1.10. Curva característica de un acoplamiento en paralelo y en serie de bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades

Supóngase que la curva característica de una bomba, para una cierta velocidad de giro n, puede aproximarse por la expresión siguiente (Q en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y H en m):

$$H_n = H_0\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right); \quad H_0 = 20 \text{ m}, \; Q_0 = 0{,}40 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.$$

Determinar la curva característica del acoplamiento de tres bombas idénticas a la mencionada, dos de ellas dispuestas en paralelo y girando ambas a una velocidad de giro $2n$, y la tercera dispuesta en serie con el conjunto de las otras dos, girando a velocidad $3n$. Discutir sobre las posibles condiciones de funcionamiento del conjunto.

Solución

Curva característica de una bomba girando a una velocidad $2n$:

$$H_{2n} = 80\left(1 - \frac{Q}{0{,}80}\right).$$

Curva característica de una bomba girando a una velocidad $3n$:

$$H_{3n} = 180\left(1 - \frac{Q}{1{,}20}\right).$$

Curva característica de la asociación en paralelo de dos bombas girando a una velocidad $2n$:

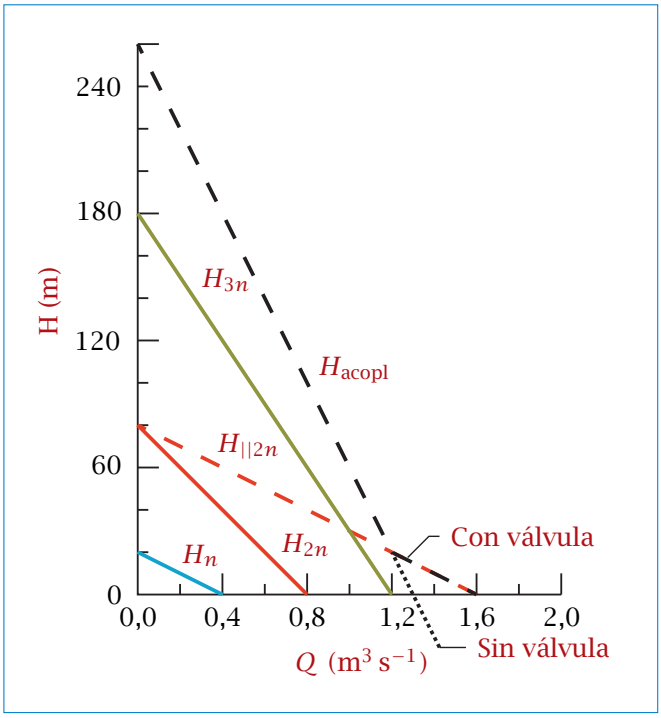
$$H_{||2n} = 80\left(1 - \frac{Q}{1{,}60}\right).$$

Curva característica del acoplamiento:

$$\boxed{H_{\text{acopl}} = 260\left(1 - \frac{Q}{1{,}30}\right)}$$

(en todas las curvas, Q en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y H en m).

En la figura adjunta se representan las distintas curvas características. La curva correspondiente al acoplamiento de las tres bombas se ha representado en color negro, con línea continua para $Q \leq 1{,}20\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, y con líneas a trazos y de puntos, dependiendo si se instala o no la tubería con válvula antirretorno en paralelo con la bomba que gira a velocidad $3n$, para $Q > 1{,}20\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$.



En el acoplamiento en serie, la bomba que gira a una velocidad de giro $3n$ no puede proporcionar (con altura manométrica positiva) un caudal superior a 1,20 $m^3\,s^{-1}$, por lo que, si se quiere que por encima de este caudal dicha bomba no contribuya a reducir la altura manométrica del conjunto, debe instalarse en paralelo con ella una tubería con una válvula antirretorno. En el caso de no hacerse esto último, por encima de $Q = 1{,}2$ $m^3\,s^{-1}$ la curva del acoplamiento sería la indicada en la figura adjunta con línea de puntos en color negro, y el acoplamiento proporcionaría una altura negativa para caudales superiores a 1,3 $m^3\,s^{-1}$.

Con la mencionada tubería instalada en paralelo con la bomba que gira a velocidad $3n$, cuando el caudal bombeado supere el valor indicado de 1,2 $m^3\,s^{-1}$ dicha bomba puede desconectarse y el agua circulará a través de la tubería en paralelo. Si no se desconecta la bomba, a través de esta circulará un caudal ligeramente superior a 1,20 $m^3\,s^{-1}$ (con altura ligeramente negativa), y el caudal restante (hasta igualar el que circule por el acoplamiento de bombas en paralelo) circulará a través de la tubería dispuesta en paralelo, con un reparto de caudales tal que la altura ligeramente negativa que proporcione la bomba coincida con la correspondiente a la pérdida de altura en la válvula. En la figura adjunta no se ha tenido en cuenta la pequeña reducción de altura debida a la pérdida de carga en la válvula antirretorno que se produce para caudales bombeados superiores a 1,20 $m^3\,s^{-1}$.

Problema 1.11. Determinación del número de etapas necesario en una bomba

Se quiere construir una bomba que proporcione un caudal de 15 $l\,s^{-1}$ y una altura de 100 m, girando a una velocidad de 3000 rpm. Para ello pueden utilizarse una o más etapas idénticas dispuestas en serie. El rendimiento se considera aceptable si la velocidad específica de cada etapa, n_q, está dentro de un rango comprendido entre 15 y 30. Se trata de determinar con cuántas etapas se podrá construir la bomba.

Solución

La velocidad específica de cada etapa viene dada por

$$n_{q_i} = n\frac{Q^{1/2}}{(H/N_e)^{3/4}},$$

siendo H/N_e la altura que proporciona cada una de las N_e etapas. Los números de etapas mínimo y máximo se obtienen a partir de los valores de $n_{q,\,\mathrm{mín}} = 15$ y $n_{q,\,\mathrm{máx}} = 30$, resultando

$$\boxed{N_{e,\,\mathrm{mín}} = 2,}$$

$$\boxed{N_{e,\,\mathrm{máx}} = 3.}$$

Capítulo 2

Bombas centrífugas

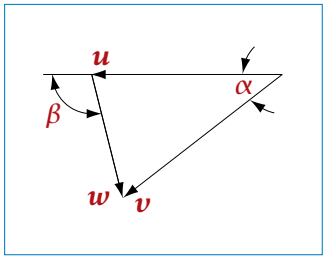
Problema 2.1. Estimación de magnitudes características a partir de datos geométricos y la velocidad de giro

De una bomba centrífuga se conocen los siguientes datos: $D_1 = 20$ cm, $D_2 = 35$ cm, $b_1 = b_2 = 4$ cm, $\beta_1 = 150°$, $\beta_2 = 160°$, $n = 1440$ rpm, $\eta_m = 0{,}8$, $\eta_v = 1$, coeficiente de disminución de trabajo $\mu = 0{,}85$. Hacer una estimación de las siguientes magnitudes:

a) Caudal en el punto de diseño.

b) Potencia útil.

c) Altura manométrica.



Solución

a) Se supondrá que el agua entra radialmente en el rodete, de forma que

$$\tan(180° - \beta_1) = v_{m1}/u_1.$$

Sustituyendo en esta ecuación $u_1 = \Omega D_1/2 = 15{,}08\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ($\Omega = \frac{2\pi}{60}\, n$) y el valor de β_1 indicado en el enunciado, se obtiene $v_{m1} = 8{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. El caudal estimado resulta entonces

$$\boxed{Q = b_1 \pi D_1 v_{m1} = 0{,}219\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

b) La potencia útil es (ver ecuación (A.3.52))

$$\dot{W}_u = \rho Q g H_{uz} = \rho Q g \mu H_{u\infty},$$

siendo

$$H_{u\infty} = u_2 v_{u2}/g.$$

Sustituyendo en esta última ecuación $u_2 = \Omega D_2/2 = 26{,}39\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y

$$v_{u2} = u_2 + v_{m2}\cot\beta_2 = u_2 + \frac{Q}{\pi D_2 b_2}\cot\beta_2 = 12{,}72\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

resulta

$$\boxed{\dot{W}_u = (0{,}85)(1000)(0{,}219)(9{,}81)(34{,}22) = 62{,}49\ \mathrm{kW}.}$$

c) La altura manométrica estimada es

$$\boxed{H_m = H_{uz}\eta_m = \mu H_{u\infty}\eta_m = 23{,}27\ \mathrm{m}.}$$

Problema 2.2. Cálculo del par de giro

Una bomba centrífuga tiene un rodete de 1,2 m de diámetro, siendo su velocidad periférica de 9 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. El agua entra en el rodete radialmente, y sale de este con una velocidad cuya componente radial es de 1,5 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. En la sección de salida los álabes están curvados hacia atrás, siendo $\beta_2 = 150°$. Si el caudal que proporciona la bomba es de 3,4 $\mathrm{m^3\,min^{-1}}$, calcular el par de giro en el eje. Se supondrá $\eta_v = \eta_o = 1$ y $\mu = 1$.

Solución

Introduciendo

$$v_{u1} = 0,$$
$$u_2 = 9\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$
$$v_{u2} = u_2 + v_{m2}\cot\beta_2 = 6{,}402\ \mathrm{m\,s^{-1}}\quad (v_{m2} = 1{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}})$$

en la ecuación (A.3.44) de Euler, se obtiene $H_u = 5{,}873$ m.

La potencia útil es

$$\dot{W}_u = \rho Q g H_u = (1000)\,\frac{3{,}4}{60}\,(9{,}81)(5{,}87) = 3265\ \mathrm{W},$$

y el par de giro,

$$M_x = \frac{\dot{W}_u}{\Omega} = \frac{\dot{W}_u}{2u_2/D_2} = 217{,}7\ \mathrm{N\,m}.$$

Problema 2.3. Cálculo de la velocidad de giro

Una bomba centrífuga impulsa 1440 $\mathrm{l\,min^{-1}}$ bajo una altura manométrica $H_m = 27$ m y un rendimiento manométrico $\eta_m = 0{,}75$. La pérdida hidráulica de energía es igual a cinco veces la energía cinética relativa del agua a la salida del rodete. El diámetro exterior del rodete es $D_2 = 0{,}20$ m, y el área de la sección útil de salida es $A_2 = 0{,}2\,D_2^2$.

Calcular el ángulo β_2 y la velocidad de giro. Se supondrá $\eta_v = 1$, $\mu = 1$ y que el agua entra en el rodete radialmente.

Solución

De la ecuación (A.3.12), y teniendo en cuenta lo indicado en el enunciado sobre la pérdida de energía hidráulica, resulta

$$H_L = H_m\left(\frac{1}{\eta_m} - 1\right) = 5\,\frac{w_2^2}{2g},$$

de donde se obtiene $w_2 = 5{,}94\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Del triángulo de velocidades a la salida del rodete, se deduce

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \beta_2) = \frac{v_{m2}}{w_2} = \frac{Q/A_2}{w_2};$$

sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\beta_2 = 149{,}7°.}$$

Introduciendo

$$v_{u2} = u_2 + v_{m2} \cot \beta_2$$

(relación obtenida a partir del triángulo de velocidades a la salida del rodete),

$$H_u = H_m/\eta_m, \quad u_2 = \Omega D_2/2 \quad \text{y} \quad v_{m2} = Q/A_2$$

en la ecuación (A.3.44) de Euler, que en este caso, al entrar radialmente el agua en el rodete, se reduce a

$$H_u = u_2 v_{u2}/g,$$

se obtiene

$$\left(\frac{\Omega D_2}{2}\right)^2 + \frac{\Omega D_2}{2}\frac{Q}{A_2}\cot\beta_2 = g\,\frac{H_m}{\eta_m}.$$

Introduciendo valores y resolviendo la ecuación resultante para Ω, se obtiene

$$\boxed{\Omega = 215{,}3 \text{ rad s}^{-1}.}$$

Problema 2.4. Cálculo de diversas magnitudes a partir de datos geométricos, la velocidad de giro y el caudal

El rodete de una bomba centrífuga, de diámetros interior y exterior $D_1 = 200$ mm y $D_2 = 600$ mm, y anchuras de las secciones de entrada y salida $b_1 = 50$ mm y $b_2 = 20$ mm, respectivamente, gira a una velocidad de 1500 rpm. El ángulo de salida de los álabes es $\beta_2 = 170°$. El caudal que suministra la bomba es de 200 l s^{-1} y el agua entra en el rodete radialmente. Supóngase $\eta_v = 0{,}89$, $\eta_o = 0{,}92$, $\eta_m = 0{,}85$, $\mu = 1$ y que las pérdidas hidráulicas en la voluta son despreciables. Calcular:

a) El ángulo β_1 óptimo de los álabes del rodete en la sección de entrada para evitar pérdidas por choque.

b) La potencia requerida por la bomba.

c) El aumento de presión a través del rodete.

Solución

a) 155,5°.

b) 153,3 kW.

c) 452,6 kN m^{-2}.

Problema 2.5. Determinación de curvas características y punto de funcionamiento

A la velocidad de funcionamiento de 1500 rpm la curva $H_m - Q$ de una bomba centrífuga es una parábola de eje vertical. La altura máxima es de 50 m para un caudal de 15 l s^{-1}, siendo la correspondiente potencia consumida de 12,5 kW. La altura se anula para un caudal de 40 l s^{-1}. La potencia consumida varía linealmente con el caudal, siendo de 5 kW para caudal nulo.

a) Determinar las funciones $H_m(Q)$, $\dot{W}(Q)$ y $\eta(Q)$ y representarlas gráficamente.

b) La bomba se utiliza para elevar agua a un depósito situado a 23 m por encima del nivel de aspiración. La tubería de impulsión tiene 400 m de longitud y 16 cm de diámetro. Supóngase un factor de fricción $f = 0{,}025$. Determinar el punto de funcionamiento.

Solución

a) $H_m(Q) = -0{,}08\,Q^2 + 2{,}4\,Q + 32$;
$\dot{W}(Q) = 5 + 0{,}5\,Q$;
$\eta(Q) = 1{,}962\,QH_m/(10 + Q)$.
(Q en l s^{-1}; H_m en m; $\dot{W}$ en kW; η en %.)

b) $Q = 30{,}65$ l s^{-1};
$H_m = 30{,}40$ m;
$\dot{W} = 20{,}33$ kW;
$\eta = 44{,}98\,\%$.

Problema 2.6. Cálculo de rendimiento manométrico y pérdidas de energía en la voluta

El rodete de una bomba centrífuga tiene un diámetro exterior $D_2 = 35{,}5$ cm y gira a una velocidad $n = 1000$ rpm. Los álabes están curvados hacia atrás, con un ángulo $\beta_2 = 150°$. La componente radial de la velocidad, constante en todo el rodete, es $v_r = 2{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. La altura manométrica que proporciona la bomba es $H_m = 21{,}7$ m. El agua entra en el rodete sin componente acimutal. Se supondrá $\eta_v = 1$ y $\mu = 1$.

Calcular:

a) Rendimiento manométrico de la bomba.

La bomba se compone de rodete y voluta, no existiendo difusor. La altura de pérdidas internas en el rodete es $H_{Lr} = 4$ m. La anchura de los álabes del rodete en la sección de salida (sección de entrada a la voluta) es $b_2 = 25$ mm. El diámetro de la sección de salida de la voluta es $D_s = 200$ mm. Calcular:

b) Altura de pérdidas internas en la voluta.

c) Fracción de la energía cinética del agua a la salida del rodete que se recupera en la voluta en forma de energía de presión.

Solución

a) El rendimiento manométrico de la bomba es $\eta_m = H_m/H_u$.

La altura útil, definida por la ecuación (A.3.44) de Euler, teniendo en cuenta que $v_{u1} = 0$, es

$$H_u = \frac{u_2 v_{u2}}{g}.$$

Por otra parte,

$$u_2 = n\frac{D_2}{2} = \frac{2\pi(1000)}{60}\frac{0{,}355}{2} = 18{,}59\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$v_{u2} = u_2 - v_{r2}\tan(\beta_2 - 90°) = 18{,}59 - 2{,}4\tan 60° = 14{,}43\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

con lo que se obtiene

$$H_u = \frac{(18{,}59)(14{,}43)}{9{,}81} = 27{,}34 \text{ m},$$

$$\boxed{\eta_m = \frac{21{,}7}{27{,}34} = 0{,}794.}$$

b) La altura de pérdidas internas en la bomba es

$$H_L = H_u - H_m = 5{,}64 \text{ m}.$$

La altura de pérdidas internas en la voluta es

$$\boxed{H_{L,\mathrm{v}} = H_L - H_{L,\mathrm{r}} = 5{,}64 - 4 = 1{,}64 \text{ m}.}$$

c) Aplicando la ecuación (A.3.3) de conservación de la energía mecánica entre la sección de salida del rodete y la sección de salida de la voluta (condiciones denotadas con el subíndice s), se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + H_{L,\mathrm{v}}, \tag{2.6.1}$$

donde

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_{r2}^2 + v_{u2}^2}{2g} = 10{,}91 \text{ m},$$

$$\frac{v_s^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A_s}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{\pi D_2 b_2 v_{r2}}{\pi D_s^2/4}\right)^2 = 0{,}231 \text{ m}.$$

Sustituyendo valores en (2.6.1), resulta

$$(p_s - p_2)/\rho g = 9{,}03 \text{ m},$$

valor que representa un porcentaje

$$\boxed{\frac{(p_s - p_2)/\rho g}{v_2^2/2g} \times 100 = 82{,}82\,\%}$$

de la altura correspondiente a la energía cinética del agua a la salida del rodete.

Problema 2.7. Estimación de magnitudes características a partir de datos geométricos y la velocidad de giro del rodete

De una bomba centrífuga se conocen los siguientes datos geométricos del rodete:

- diámetro interior: $D_1 = 101{,}6$ mm;
- diámetro exterior: $D_2 = 177{,}8$ mm;
- ángulo de entrada de los álabes: $\beta_1 = 150°$;
- ángulo de salida de los álabes: $\beta_2 = 160°$;
- anchura de los álabes en las secciones de entrada y salida: $b_1 = b_2 = 44{,}5$ mm.

La velocidad de giro nominal es $n = 1440$ rpm. A partir de los datos anteriores, hacer una estimación de las siguientes magnitudes en el punto de funcionamiento nominal:

a) Caudal.

b) Altura útil.

c) Potencia consumida por la bomba.

Solución

a) $0{,}06282\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

b) 8,831 m.

c) 5,442 kW.

Problema 2.8. Bombeo de agua entre dos depósitos: cálculo de diversas magnitudes, curva característica de la instalación y punto de funcionamiento

Una bomba centrífuga eleva agua desde un depósito a otro cuya superficie libre se encuentra a 25 m de altura sobre la superficie libre en el primero (ambos depósitos están abiertos a la atmósfera), y suministra un caudal $Q = 140\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ bajo una altura manométrica $H_m = 30{,}6$ m, consumiendo el motor eléctrico de accionamiento una potencia de 63 kW. El rendimiento del motor eléctrico es $\eta_e = 0{,}9$, y los rendimientos volumétrico y orgánico de la bomba son, respectivamente, $\eta_v = 0{,}94$ y $\eta_o = 0{,}96$. Se supondrá $\mu = 1$. Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 5$ cm y $D_2 = 12$ cm, y las anchuras en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 7{,}5$ cm y $b_2 = 3{,}8$ cm. El ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta_2 = 120°$. El agua entra en el rodete radialmente y sin choque. La curva característica de la bomba puede aproximarse por la ecuación

$$H_m = 60\left[1 - (Q/200)^2\right],$$

(H_m en m y Q en $\mathrm{l\,s^{-1}}$). Determinar:

a) Rendimiento manométrico de la bomba.

b) Velocidad de giro del rodete.

c) Ángulo de los álabes del rodete en la sección de entrada.

d) Curva característica de la instalación.

e) Punto de funcionamiento de la bomba si se la hace girar a una velocidad superior en un 20 % a la calculada en el apartado b).

Solución

a) 0,8214.

b) 3558 rpm.

c) $\beta_1 = 126{,}4°$.

d) $H_i = 25 + Q^2/3500$ (H_i en m, Q en $\mathrm{l\,s^{-1}}$).

e) $Q = 0{,}1854\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$, $H_m = 34{,}82$ m.

[La nueva curva característica de la bomba es

$$\frac{H_m}{1{,}44} = 60\left\{1 - \left[\frac{Q}{(1{,}2)(200)}\right]^2\right\}$$

(H_m en m y Q en $\mathrm{l\,s^{-1}}$). Véase, por ejemplo, el Problema 1.1.]

Problema 2.9. Bomba radial con difusor de álabes. Análisis de pérdidas en rodete, difusor y voluta

Los diámetros interior y exterior del rodete de una bomba centrífuga son, respectivamente, $D_1 = 100$ mm y $D_2 = 200$ mm, y las anchuras de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 40$ mm y $b_2 = 20$ mm. El difusor, provisto de álabes, tiene un diámetro exterior[1] $D_4 = 340$ mm y secciones de entrada y salida de anchuras $b_3 = 22$ mm y $b_4 = 25$ mm, siendo $D_3 \approx D_2$. En el punto de funcionamiento nominal, $Q = 26\ \mathrm{l\,s^{-1}}$, $H_m = 60$ m, $n = 2850$ rpm, $\eta_m = 0{,}86$, $\eta_o = 0{,}92$ y $\eta_v = 0{,}97$. El coeficiente de disminución de trabajo es $\mu = 0{,}88$. La altura de pérdidas en el rodete es $H_{L,\mathrm{r}} = 4$ m, y en el difusor,

$$H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}22\,(v_3^2 - v_4^2)/(2g).$$

El agua entra radialmente en el rodete. Calcular:

a) Ángulos de entrada y salida de los álabes del rodete.

b) Ángulo de entrada de los álabes del difusor.

c) Alturas de pérdidas en el difusor y en la voluta. (Supóngase despreciable el momento de giro que se ejerce sobre el difusor.)

d) Incremento de presión en el rodete.

e) Potencia consumida por la bomba.

[1] Se utilizarán los subíndices 1: entrada al rodete, 2: salida del rodete, 3: entrada al difusor, 4: salida del difusor.

Solución

a) 171,9°; 150,6°.

b) 4,689°.

c) 3,885 m; 1,882 m.

[Si se supone despreciable el momento de giro que se ejerce sobre el difusor, teniendo en cuenta la ecuación (A.3.43) aplicada a este, puede escribirse

$$M_x = \rho Q(r_3 v_{u3} - r_4 v_{u4}) = 0$$

(es decir, el momento cinético se mantiene constante a través del difusor).]

d) 382,2 kN m^{-2}.

e) 19,94 kW.

Problema 2.10. Bomba de varias etapas. Análisis de condiciones de semejanza

Una bomba centrífuga de dos etapas funciona a 1450 rpm con un caudal nominal de 10 l s^{-1} y una altura manométrica de 40 m.

a) Calcular la velocidad específica de la bomba y la potencia del motor de accionamiento, suponiendo un rendimiento total del 70 %.

b) Si se acciona la misma bomba con un motor que gira a 2900 rpm, y suponiendo que se mantienen condiciones de funcionamiento semejantes, determinar el caudal, la altura manométrica, la potencia del motor y la velocidad específica.

c) Si se añaden dos etapas más, idénticas a las anteriores, y se desea suministrar el mismo caudal del apartado b) utilizando un motor que gira a 2900 rpm, determinar la nueva altura manométrica que proporcionará la bomba y la velocidad específica de la bomba.

Solución

a) $\omega_q = 0{,}1722$;
$\dot{W}_t = 5{,}606$ kW.

b) $Q = 0{,}02000\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$;
$H_m = 160$ m;
$\dot{W}_t = 44{,}85$ kW;
$\omega_q = 0{,}1722$.

c) $H_m = 320$ m;
$\omega_q = 0{,}1024$.

Problema 2.11. Análisis de una bomba centrífuga (I)

En una bomba radial, el diámetro exterior del rodete es $D_2 = 250$ mm, el área efectiva de paso en la sección de salida del rodete es $A_2 = 165\ \mathrm{cm^2}$ y $\beta_2 = 150°$.

Girando la bomba a 1450 rpm en su punto de funcionamiento nominal, se mide un caudal de $32\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ en la sección situada junto a la brida de aspiración. Se estima que el caudal fugado al exterior, a causa del mal estado de los prensaestopas, es igual a un 3 % del caudal que suministra la bomba,[2] y que el rendimiento volumétrico es $\eta_v = 0{,}88$. El agua entra en el rodete radialmente.

En el eje se mide un par de 48 N m. La componente periférica de la velocidad absoluta a la salida de los álabes se estima en un 0,7 del valor teórico dado por la teoría unidimensional. Mediante un vacuómetro y un manómetro conectados, respectivamente, a la entrada y salida de la bomba en puntos situados a la misma cota, se miden presiones manométricas de −330 mm c.m. y 12,2 m c.a., respectivamente. (Densidad del mercurio: $13\,600\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.) La presión barométrica es de 750 mm c.m. y la temperatura del agua 10°C (presión de saturación de vapor: 0,01227 bar).

El factor de fricción para las tuberías de aspiración e impulsión, de diámetros $d_a = 150$ mm y $d_i = 100$ mm, respectivamente, es $f = 0{,}027$. La tubería de aspiración es de longitud $L_a = 6$ m y tiene instalada una válvula de pie con alcachofa cuyo coeficiente global adimensional de pérdida de carga es $K_v = 6{,}5$.

	Coeficiente de corrección de Stodola (ϵ)				
	$\beta_2 = 160°$	$\beta_2 = 150°$	$\beta_2 = 140°$	$\beta_2 = 120°$	$\beta_2 = 90°$
$Z = 4 \div 8$	1.1	0.90	0.75	0.60	0.55
$Z = 8 \div 16$	1.15	1.0	0.85	0.70	0.65

Calcular:

a) Caudal en la tubería de impulsión y caudal que circula a través del rodete.

b) Altura manométrica de la bomba.

c) Altura útil y rendimiento manométrico suponiendo un número infinito de álabes.

d) Altura útil y rendimiento manométrico teniendo en cuenta el efecto de número finito de álabes.

e) Rendimiento total.

f) Ángulo de entrada de los álabes del difusor.

g) Número de álabes estimado suponiendo que la bomba ha sido calculada teniendo en cuenta la corrección de Stodola.

h) Velocidad específica de la bomba.

i) Altura de aspiración máxima admisible si el $(\text{NPSH})_r$ de la bomba es de 2 m. La bomba toma agua desde un depósito abierto a la atmósfera.

j) Rendimiento orgánico de la bomba.

Solución

a) El caudal suministrado por la bomba es

$$Q = Q_a - Q_{fe},$$

[2] El caudal de fugas es $Q_f = Q_{fi} + Q_{fe}$, siendo Q_{fi} el caudal de fugas interno que desde la zona de impulsión retorna a la aspiración de la bomba, y Q_{fe} el caudal que se fuga al exterior desde la impulsión de la bomba. Si Q_a es el caudal en la aspiración y Q el caudal en la tubería de impulsión, $Q = Q_a - Q_{fe}$ y el caudal que circula por el rodete es $Q_r = Q_a + Q_{fi} = Q + Q_{fe} + Q_{fi}$.

siendo Q_a el caudal en la aspiración y $Q_{fe} = 0{,}03\,Q$ el de fugas al exterior. Sustituyendo valores, de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\boxed{Q = 0{,}0311 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.}$$

Teniendo en cuenta la definición de rendimiento volumétrico de la ecuación (A.3.13),

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_r},$$

donde Q_r es el caudal que circula por el rodete, y sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{Q_r = 0{,}0353 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.}$$

b) Utilizando la ecuación (A.3.5), despreciando el término gravitatorio, teniendo en cuenta que

$$v_s = \frac{4\,Q}{\pi d_i^2}$$

y

$$v_e = \frac{4\,Q_a}{\pi d_a^2},$$

y sustituyendo valores, se obtiene

$$H_m = \frac{p_s}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} - \frac{v_e^2}{2g} = 12{,}2 + 0{,}33\,\frac{13\,600}{1000} + \frac{(3{,}96)^2 - (1{,}81)^2}{(2)(9{,}81)},$$

de donde resulta

$$\boxed{H_m = 17{,}32 \text{ m}.}$$

c) La altura útil correspondiente a un número infinito de álabes es la definida por la ecuación (A.3.44) de Euler; teniendo en cuenta que $v_{u1} = 0$, se tiene

$$H_{u\infty} = \frac{u_2 v_{u2}}{g},$$

siendo

$$u_2 = \Omega\,\frac{D_2}{2} = \frac{2\pi(1450)}{60}\,\frac{0{,}25}{2} = 18{,}98 \text{ m}\,\text{s}^{-1},$$

$$v_{u2} = u_2 - v_{r2}\tan(\beta_2 - 90^\circ) = u_2 - \frac{Q_r}{A_2}\tan(\beta_2 - 90^\circ)$$

$$= 18{,}98 - \frac{0{,}0353}{165 \times 10^{-4}}\tan 60^\circ = 15{,}27 \text{ m}\,\text{s}^{-1},$$

con lo que resulta

$$\boxed{H_{u\infty} = \frac{(18{,}98)(15{,}27)}{9{,}81} = 29{,}55 \text{ m}.}$$

El rendimiento manométrico, suponiendo que el número de álabes es infinito, se obtiene mediante la ecuación (A.3.12) haciendo $H_u = H_{u\infty}$. Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\eta_{m\infty} = \frac{H_m}{H_{u\infty}} = \frac{17{,}32}{29{,}57} = 0{,}586.}$$

d) El coeficiente de disminución de trabajo, definido por la ecuación (A.3.52), es igual a la relación entre la componente acimutal de la velocidad absoluta a la salida de los álabes y el correspondiente valor teórico proporcionado por la teoría unidimensional; dicha relación, según se indica en el enunciado, es igual a 0,7. De acuerdo también con la ecuación (A.3.52), la altura útil que incluye el efecto de número finito de álabes es

$$\boxed{H_{uz} = \mu H_{u\infty} = (0{,}7)(29{,}57) = 20{,}7 \text{ m}.}$$

El rendimiento manométrico es entonces

$$\boxed{\eta_m = \frac{H_m}{H_{uz}} = \frac{17{,}32}{20{,}7} = 0{,}837}$$

(obsérvese que $\eta_m = \eta_{m\infty}/\mu$).

e) El rendimiento total se define en la ecuación (A.3.10),

$$\eta_t = \frac{\rho Q g H_m}{M\Omega} = \frac{(1000)(0{,}0311)(9{,}81)(17{,}32)}{(48)(1450)(2)\pi/60},$$

de donde resulta

$$\boxed{\eta_t = 0{,}724.}$$

f) Del triángulo de velocidades a la entrada del difusor, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en apartados anteriores,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \arctan\left(\frac{v_{r3}}{v_{u3}}\right) = \arctan\left(\frac{Q_r \eta_v / A_2}{v'_{u2}}\right) \\ &= \arctan\left[\frac{(0{,}0353)(0{,}88)/(165\times 10^{-4})}{(0{,}7)(15{,}27)}\right],\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\alpha_3 = 9{,}99°.}$$

g) De la ecuación (A.3.56),

$$\Delta v_{u2} = \chi u_2,$$

teniendo en cuenta la ecuación (A.3.52) y sustituyendo la expresión para χ de la ecuación (A.3.57), resulta

$$v_{u2}(1-\mu) = u_2 \epsilon \frac{\pi}{Z} \operatorname{sen} \beta_2. \tag{2.11.1}$$

De la tabla del enunciado, suponiendo que Z está comprendido entre 4 y 8, resulta $\epsilon = 0{,}9$. Sustituyendo valores, de la ecuación (2.11.1) se determina $Z = 5{,}86$. El número de álabes del rodete es por tanto

$$\boxed{Z = 6}$$

(incluido en el rango supuesto al entrar en la tabla).

h) La velocidad específica adimensional se define en la ecuación (A.3.68),

$$\omega_q = \Omega \frac{Q^{1/2} \rho^{3/4}}{(\Delta p_t)^{3/4}}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{\omega_q = 0{,}57}$$

($n_q = 30{,}1$).

i) Para que la bomba no funcione en condiciones de cavitación, la altura neta de succión disponible,

$$(\text{NPSH})_d = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - \frac{p_v}{\rho g} \tag{2.11.2}$$

(el subíndice e corresponde a la entrada de la bomba), debe ser igual, al menos, a $(\text{NPSH})_r$.

Aplicando la ecuación (A.1.16) de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito y la sección de entrada a la bomba, resulta

$$\frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_a = \frac{p_{\text{at}}}{\rho g} - \left(f \frac{L_a}{d_a} + K_v \right) \frac{v_e^2}{2g}. \tag{2.11.3}$$

De las ecuaciones (2.11.2) y (2.11.3), eliminando p_e, introduciendo $(\text{NPSH})_d = (\text{NPSH})_r = 2$ m y sustituyendo valores (en el apartado b) se ha determinado v_e), se obtiene la altura máxima admisible de aspiración

$$\boxed{z_{a,\text{máx}} = 6{,}8 \text{ m}.}$$

j) De la ecuación (A.3.15) se obtiene

$$\boxed{\eta_o = \frac{\eta_t}{\eta_m \eta_v} = \frac{0{,}724}{(0{,}88)(0{,}837)} = 0{,}983.}$$

Problema 2.12. Análisis de una bomba centrífuga (II)

Una bomba centrífuga monocelular transvasa agua desde un depósito inferior de nivel variable a un depósito superior en el que el nivel de agua se mantiene constante. La bomba, con una velocidad de giro nominal $n = 1470$ rpm, se halla situada a una cota 11 m por debajo de la superficie libre del agua en el depósito superior, y funciona con máximo rendimiento cuando la altura de aspiración es $z_a = 1$ m.

La tubería de aspiración tiene un diámetro $D_a = 15$ cm y una longitud $L_a = 7$ m, y está provista de una válvula de pie con alcachofa con un coeficiente de pérdida de carga $K_a = 5$. La tubería de impulsión tiene un diámetro $D_i = 10$ cm y una longitud $L_i = 20$ m; el coeficiente global de pérdidas locales en esta tubería, excluyendo la pérdida correspondiente a la energía cinética del chorro de salida (que debe tenerse en cuenta), puede tomarse $K_i = 1{,}5$. Se supondrán unos factores de fricción $f_a = 0{,}018$ en la tubería de aspiración y $f_i = 0{,}0195$ en la tubería de impulsión. La curva característica de la bomba correspondiente a la velocidad de giro nominal es (H_m en m y Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$):

$$H_m = 20\left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}044}\right)^2\right].$$

En las condiciones indicadas de máximo rendimiento, la bomba consume una potencia total de 4,8 kW.

Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 0{,}1$ m y $D_2 = 0{,}23$ m, y las anchuras en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 40$ mm y $b_2 = 19$ mm. Los álabes del rodete están curvados hacia atrás, siendo $\beta_2 = 140°$. El agua entra radialmente en el rodete. El valor de la componente acimutal de la velocidad absoluta en la sección de salida del rodete es igual a 2/3 del valor teórico correspondiente a un número infinito de álabes. Se tomará $\eta_v = 1$.

Se supondrá que la bomba funciona en condiciones nominales, con una altura de aspiración de 1 m.

Coeficiente de corrección de Stodola (ϵ)

	$\beta_2 = 160°$	$\beta_2 = 150°$	$\beta_2 = 140°$	$\beta_2 = 120°$	$\beta_2 = 90°$
$Z = 4 \div 8$	1,1	0,90	0,75	0,60	0,55
$Z = 8 \div 16$	1,15	1,0	0,85	0,70	0,65

Determinar:

a) Caudal y altura manométrica proporcionados por la bomba.

b) Presiones manométricas en las secciones situadas junto a las bridas de unión a la bomba de las tuberías de aspiración e impulsión.

c) Velocidad específica de la bomba. Indicar de qué tipo de bomba centrífuga se trata.

d) Coeficiente de disminución de trabajo.

e) Rendimientos manométrico y total de la bomba.

f) Ángulo óptimo de los álabes del rodete en la sección de entrada, β_1, para evitar pérdidas por choque.

g) Ángulo de entrada de los álabes del difusor.

h) Número de álabes del rodete (la bomba se ha calculado utilizando la corrección de Stodola).

Mediante ensayos, haciendo descender el nivel de agua en el depósito inferior, se ha comprobado que la máxima altura de aspiración admisible en la bomba es $z_{a,\,\text{máx}} = 6{,}5$ m. La presión atmosférica es de 750 mm c.m. y la temperatura del agua 15°C (presión de saturación de vapor: 0,017 bar).

Determinar:

i) $(\text{NPSH})_r$ de la bomba.

j) Sin modificar las restantes características de la instalación a la que se halla acoplada la bomba, ¿podría mantenerse de alguna forma el máximo rendimiento de la bomba cuando esta funcione con la máxima altura de aspiración admisible?

Solución

a) $0{,}02197\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$;
$15{,}01$ m.

b) $-15{,}10\ \text{kN}\,\text{m}^{-2}$;
$129{,}0\ \text{kN}\,\text{m}^{-2}$.

c) 0,5397 (ω_q); bomba radial de velocidad media [véase la Tabla A.2].

d) 0,6667.

e) 0,7900;
0,6741.

f) 167,2°.

g) 8,642°.

h) 5.

i) 3,383 m.

j) No (justifíquese).

Problema 2.13. Análisis de una bomba centrífuga (III)

El rodete de una bomba centrífuga tiene un diámetro interior $D_1 = 0{,}20$ m y un diámetro exterior $D_2 = 0{,}40$ m. La velocidad de giro del rodete es $n = 3000$ rpm. La velocidad absoluta de entrada del agua en el rodete es radial. La altura manométrica de la bomba correspondiente a caudal nulo es $H_{m0} = 200$ m. El rodete se ha diseñado de forma que las pérdidas por choque sean nulas cuando los módulos de las velocidades absoluta y relativa en la sección de salida del rodete sean iguales; en estas condiciones, el rendimiento manométrico es $\eta_m = 0{,}9$. Se tomará $\eta_v = 1$.

Calcular:

a) Rendimiento manométrico de la bomba correspondiente al punto de funcionamiento con caudal nulo.

b) Altura manométrica que proporciona la bomba en las condiciones de funcionamiento sin pérdidas por choque.

Los álabes del rodete están curvados hacia atrás, saliendo el agua del rodete con un ángulo $\beta_2 = 150°$. Las anchuras del rodete en su sección de salida y del difusor en su sección de entrada son $b_2 = b_3 = 0{,}02$ m. Debido al espesor de los álabes, se supondrá que las áreas de las secciones de salida del rodete y de entrada al difusor se reducen en un 10 %. Se supondrá asimismo que el coeficiente de disminución de trabajo es igual a la unidad.

c) Calcular el ángulo de entrada de los álabes del difusor.

d) Calcular el caudal y la potencia útil de la bomba en el punto de funcionamiento del apartado b).

e) Determinar las curvas de pérdidas por fricción y de pérdidas por choque, y la curva característica de la bomba.

f) Calcular el caudal y la potencia útil en el punto de funcionamiento correspondiente a altura manométrica nula.

g) Determinar la curva de rendimiento manométrico de la bomba en función del caudal.

h) Indicar de qué tipo de bomba centrífuga se trata.

Solución

a) 0,497.

b) 181,1 m.

c) 30°.

d) 0,4103 $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$;
809,8 kW.

e) $H_f = 119{,}5\,Q^2$;
$H_{ch} = 1203\,(Q - 0{,}41)^2$;
$H_m = 200 + 496{,}4\,Q - 1322\,Q^2$
(H en m, Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$).

f) 0,6196 $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$;
599,1 kW.

g) $\eta_m = \dfrac{200 + 496{,}4\,Q - 1322\,Q^2}{402{,}4 - 490{,}4\,Q}$
(Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$).

h) Bomba radial, relativamente rápida. [Utilícese la Tabla A.2.]

Problema 2.14. Análisis de una bomba centrífuga (IV)

En las bridas de unión de una bomba centrífuga a las tuberías de aspiración e impulsión, de diámetros interiores $D_a = 160$ mm y $D_i = 110$ mm, se miden presiones manométricas de $-0{,}2$ kgf cm^{-2} y $1{,}5$ kgf cm^{-2}, respectivamente. La potencia consumida por el motor eléctrico que acciona la bomba es de 8 kW. Se supondrá un rendimiento del motor eléctrico $\eta_e = 0{,}92$ y un rendimiento total de la bomba $\eta_t = 0{,}56$.

a) Determinar el caudal que circula por la bomba y la altura manométrica.

El rendimiento volumétrico de la bomba es $\eta_v = 0{,}92$ y el rendimiento orgánico $\eta_o = 0{,}97$. Las pérdidas hidráulicas en el difusor y la voluta representan el 50 % de las pérdidas hidráulicas totales en la bomba. Los diámetros exterior e interior del rodete son, respectivamente, $D_2 = 200$ mm y $D_1 = 100$ mm, y las anchuras de los álabes del rodete en las secciones de salida y entrada, $b_2 = 16$ mm y $b_1 = 32$ mm. El ángulo de los álabes en la sección de salida del rodete es $\beta_2 = 90°$. El rodete tiene doce álabes. El agua entra radialmente en el rodete.

b) Calcular la altura de pérdidas en el rodete.

c) Calcular el coeficiente de disminución de trabajo μ. Utilícese la corrección de Pfleiderer con $\psi = 0{,}6\,(1 + \operatorname{sen}\beta_2)$.

d) Determinar la velocidad de giro del rodete y el triángulo de velocidades a la salida de este.

e) Dibujar esquemáticamente (indicando ángulos y sentido de giro) la forma de los álabes del rodete y del difusor, e indicar a qué puede deberse el bajo rendimiento de la bomba.

Solución

a) $0{,}0243$ m^3 s^{-1};
$17{,}26$ m.

b) $5{,}122$ m.

c) 0,789.

d) 1765 rpm;
$v_{m2} = 2{,}632\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$v'_{u2} = 14{,}60\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$\beta'_2 = 145{,}9°$.

Problema 2.15. Determinación del tamaño del rodete

Una bomba centrífuga eleva un caudal de agua $Q = 45\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ entre dos depósitos. Las tuberías de aspiración e impulsión tienen el mismo diámetro de 15 cm, y longitudes respectivas de 4 m y 32 m; en ambas se supondrá un factor de fricción $f = 0{,}02$. La altura entre las superficies libres del agua en los dos depósitos es de 30 m. La suma de los coeficientes de pérdida de carga local se supondrá igual a 2,4 (este valor no incluye la pérdida de la energía cinética del chorro de salida en el depósito superior).

La bomba gira a una velocidad de $160\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$. Los álabes del rodete están curvados hacia delante, con un ángulo $\beta_2 = 55°$, y tienen una anchura en la sección de salida $b_2 = D_2/10$. El área de paso en la sección de salida del rodete se reduce en un 5 % debido al espesor de los álabes. El agua entra en el rodete radialmente. El rendimiento manométrico es $\eta_m = 0{,}75$. Se supondrá $\eta_v = 1$ y $\mu = 1$.

Calcular:

a) Altura manométrica.

b) Diámetro exterior del rodete, D_2.

Solución

a) $H_m = 32{,}71$ m.

b) $D_2 \approx 0{,}25$ m.

Problema 2.16. Análisis de una bomba centrífuga (V)

Una bomba centrífuga transvasa agua desde un depósito a otro más elevado, ambos abiertos a la atmósfera. Las tuberías de impulsión y aspiración tienen el mismo diámetro. La diferencia de altura entre los niveles de la superficie libre en los depósitos es de 30 m. El incremento de presión a través de la bomba es $\Delta p = 3{,}5$ kgf cm^{-2} cuando se bombea un caudal $Q = 160$ l s^{-1}. En dichas condiciones, la potencia total en el eje de la bomba es de 70 kW. Se ha estimado una potencia perdida por rozamiento en elementos mecánicos de la bomba $\dot{W}_o = 0{,}7$ kW, un caudal recirculante (caudal de fugas internas) $Q_{fi} = 0{,}02\,Q$ y un coeficiente de disminución de trabajo $\mu = 0{,}8$. Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 7$ cm y $D_2 = 14$ cm, las anchuras de las secciones de entrada y salida del rodete, $b_1 = 8$ cm y $b_2 = 4{,}2$ cm, y el ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta_2 = 125°$. El agua entra en el rodete radialmente y sin choque.

Determinar:

a) Rendimiento manométrico de la bomba.

b) Velocidad de giro del rodete.

c) Triángulo de velocidades en las secciones de entrada y salida del rodete.

d) Curva característica de la instalación.

e) Curva característica de la bomba, teniendo en cuenta que cuando el rodete gira a una velocidad un 20 % inferior a la determinada en el apartado b) la bomba proporciona un caudal $Q = 43$ l s^{-1}. Se supondrá que la curva característica es de la forma

$$H_m = A - BQ^2,$$

siendo A y B constantes.

Solución

a) $\eta_m = 0{,}809$.

b) $n = 3593$ rpm.

c) $u_1 = 13{,}17\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$v_{u1} = 0$;
$\beta_1 = 144{,}8°$;
$v'_{u2} = 16{,}12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$\beta'_2 = 139{,}1°$;
$v_{m2} = 8{,}835\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) $H_{\mathrm{inst}} = 30 + 195{,}3\,Q^2$.

e) $H_m = 49{,}02 - 547{,}7\,Q^2$.

Problema 2.17. Curva característica ideal

a) Determinar la curva característica ideal de una bomba centrífuga cuyo rodete tiene un diámetro exterior $D_2 = 40$ cm y una anchura de los álabes en la sección de salida $b_2 = 5$ cm. El ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta_2 = 150°$. La velocidad de giro es $n = 1000$ rpm. El agua entra en el rodete radialmente. Se despreciarán las fugas de caudal.

b) Explicar cómo se modificaría cualitativamente la curva obtenida al tener en cuenta distintos tipos de pérdidas hidráulicas.

Solución

a) $H_u = 44{,}71 - 58{,}85\,Q$.

b) Introduciendo el efecto de la desviación angular a la salida del rodete (según la correlación de Stodola, $\Delta v_{u2} = v_{u2} - v'_{u2} = \chi u_2$), resulta

$$H_{uz} = 44{,}71\,(1 - \chi) - 58{,}58\,Q.$$

Introduciendo en $H_m = H_{uz} - H_f - H_{ch}$ las pérdidas por fricción, $H_f = K_1 Q^2$, y por choque, $H_{ch} = K_2 (Q - Q_n)^2$, siendo Q_n el caudal nominal y K_1 y K_2 constantes, resulta

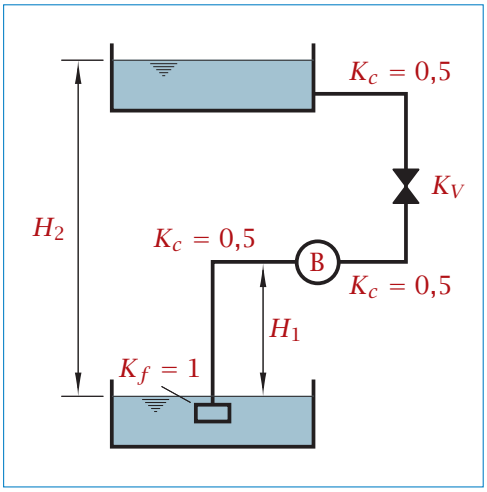
$$\boxed{H_m = 44{,}71\,(1 - \chi) - K_2 Q_n^2 + (2K_2 Q_n - 58{,}85)Q - (K_1 + K_2)Q^2.}$$

Problema 2.18. Condiciones de operación para evitar cavitación en un sistema de bombeo

En la instalación de la figura la bomba B está situada a una altura $H_1 = 6$ m por encima de la superficie libre del agua en el depósito inferior, del que toma agua a través de la tubería de aspiración, de longitud $L_a = 10$ m y diámetro $D_a = 20$ cm. La curva característica de la bomba para una velocidad de giro del rodete n es

$$H_m = 11\left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}2}\right)^2\right]$$

(Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y H_m en m). El agua es elevada hasta el depósito superior, cuya superficie libre está situada a una altura $H_2 = 20$ m respecto de la del depósito inferior. Ambos depósitos están abiertos a la atmósfera. La tubería de impulsión tiene una longitud $L_i = 30$ m y un diámetro $D_i = 15$ cm. Se tomará el mismo factor de fricción en ambas tuberías, $f = 0{,}02$. Los coeficientes de pérdida de carga en los codos y en el filtro se indican en la figura. Se supondrá que la velocidad de giro del rodete es $2n$.



a) Calcular el caudal máximo que puede aspirar la bomba si el $(\mathrm{NPSH})_r$ de la bomba es igual a 2 m. (Tómese como presión ambiente y presión de vapor $p_a = 1$ kgf cm^{-2} y $p_v = 0{,}025$ kgf cm^{-2}, respectivamente.)

b) Calcular el coeficiente de pérdida de carga de la válvula, K_V, para el caudal del apartado a).

c) Explicar qué ocurriría si el valor del coeficiente K_V fuese el doble del calculado en el apartado anterior. ¿Y si fuese la mitad?

Solución

a) Para que no se produzca cavitación en la bomba la altura neta de succión disponible,

$$(\text{NPSH})_d = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - \frac{p_v}{\rho g}, \tag{2.18.1}$$

(el subíndice e corresponde a la sección de entrada a la bomba) tiene que ser igual, al menos, a $(\text{NPSH})_r$, que en este caso es igual a 2 m. Planteando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del depósito inferior y la sección de entrada a la bomba, se obtiene

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_e}{\rho g} + H_1 + \frac{8\,Q^2}{\pi^2 g D_a^4}\left(f\,\frac{L_a}{D_a} + K_f + K_c + 1\right). \tag{2.18.2}$$

Sustituyendo en esta la ecuación (2.18.1), tomando $(\text{NPSH})_d = (\text{NPSH})_r$, se obtiene el valor del caudal máximo que puede aspirar la bomba. Sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{Q_{\text{máx}} = 0{,}116\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}.}$$

b) Compruébese que, para una velocidad de giro de la bomba igual a $2n$, la curva característica de la bomba es

$$H_m = 44\left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}4}\right)^2\right]. \tag{2.18.3}$$

Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre las superficies libres de los depósitos inferior y superior, resulta

$$\begin{aligned} H_m = H_2 &+ \frac{8\,Q_{\text{máx}}^2}{\pi^2 g D_a^4}\left(f\,\frac{L_a}{D_a} + K_f + K_c\right) \\ &+ \frac{8\,Q_{\text{máx}}^2}{\pi^2 g D_i^4}\left(f\,\frac{L_i}{D_i} + 2K_c + K_V + 1\right), \end{aligned} \tag{2.18.4}$$

es decir, la altura manométrica que tiene que proporcionar la bomba, H_m, tiene que ser igual a la altura geométrica más la altura de pérdidas en la instalación. De la ecuación (2.18.4), sustituyendo el término H_m por la expresión de la curva característica de la bomba (ecuación (2.18.3)) y despejando, se obtiene

$$\boxed{K_V = 2{,}372.}$$

c) El valor del coeficiente K_V calculado en el apartado anterior corresponde al caudal máximo, $Q_{\text{máx}}$. A medida que se aumenta K_V, disminuye el caudal, lo que hace que disminuyan las pérdidas en la tubería de aspiración y que el $(\text{NPSH})_d$ aumente. Puede comprobarse que, para $K_V' = 2K_V = 4{,}744$, $Q' = 0{,}105\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y $(\text{NPSH})_d' = 2{,}314$ m. Por el contrario, al disminuir K_V, disminuye $(\text{NPSH})_d$. Puede comprobarse que, para $K_V'' = K_V/2 = 1{,}186$, $Q'' = 0{,}123\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ y $(\text{NPSH})_d'' = 1{,}585$ m. En estas últimas condiciones, se producirá cavitación en la bomba.

Problema 2.19. Análisis de una bomba centrífuga (VI)

Una bomba centrífuga impulsa un caudal de agua $Q = 42\ \text{l}\,\text{s}^{-1}$ y consume una potencia útil $\dot{W}_u = 18$ kW, con un rendimiento manométrico $\eta_m = 0{,}77$. El diámetro exterior del rodete es $D_2 = 8b_2$, siendo b_2 la anchura de la sección de salida del rodete, cuya área de paso se reduce en un 5 % debido al espesor de los álabes. Los álabes del rodete están curvados hacia delante, con un ángulo $\beta_2 = 60°$. Se supondrá que el agua entra en el rodete radialmente. La velocidad periférica del rodete es $u_2 = 20\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$. Las tuberías de aspiración e impulsión están conectadas al fondo de sendos depósitos abiertos a la atmósfera, y tienen diámetros $D_a = 20$ cm y $D_i = 15$ cm, y longitudes $L_a = 5$ m y $L_i = 30$ m, respectivamente. En ambas tuberías se supondrá un factor de fricción $f = 0{,}023$. La suma de los coeficientes de pérdida de carga local en la instalación (referidos a la tubería de impulsión) se supondrá igual a 3 (incluyendo este valor la pérdida de la energía cinética del chorro de salida en el depósito superior). Se tomará $\eta_v = 1$ y $\mu = 1$.

Determinar:

a) Velocidad de giro de la bomba.

b) Diferencia de altura entre las superficies libres del agua en los dos depósitos.

¿Es posible determinar, a partir de los datos disponibles, la altura manométrica y la altura útil que proporcionaría la bomba (funcionando con la misma velocidad de giro calculada en el apartado a)) si se cerrase totalmente una válvula situada en la tubería de impulsión o en la de aspiración? En su caso, determínense dichas alturas.

Solución

a) $n = 1791$ rpm.

b) $H_g = 31{,}4$ m.

Problema 2.20. Cálculo del ángulo de entrada de los álabes del rodete

Se trata de determinar el ángulo β_1 que deben tener los álabes en la sección de entrada del rodete de una bomba centrífuga para que el agua entre sin choque. Se supondrá que la velocidad absoluta del agua en dicha sección tiene dirección radial. Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 6$ cm y $D_2 = 14$ cm, y las anchuras en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 8$ cm y $b_2 = 5$ cm. El ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta_2 = 160°$. La relación entre la componente acimutal de la velocidad absoluta en la sección de salida del rodete y el valor teórico dado por la teoría unidimensional se tomará $\mu = 0{,}76$.

En el punto de funcionamiento considerado, el caudal suministrado por la bomba es $Q = 150\ \mathrm{l\,s^{-1}}$, la altura manométrica $H_m = 35$ m y el motor eléctrico de accionamiento consume una potencia $\dot{W}_e = 80$ kW. Se supondrán los siguientes rendimientos volumétrico, orgánico y del motor eléctrico: $\eta_v = 0{,}93$, $\eta_o = 0{,}95$ y $\eta_e = 0{,}9$. Determinar asimismo el rendimiento manométrico de la bomba.

Solución

De la ecuación de Euler, que en este caso se reduce a

$$H_{u\infty} = \frac{u_2 v_{u2}}{g}, \tag{2.20.1}$$

teniendo en cuenta que

$$H_{u\infty} = \frac{H_{uz}}{\mu}, \tag{2.20.2}$$

$$H_{uz} = \eta_e \eta_o \eta_v \frac{\dot{W}_e}{g\rho Q}, \tag{2.20.3}$$

$$u_2 = v_{u2} + v_{m2}\cot(180° - \beta_2) = v_{u2} + \frac{Q}{\pi b_2 D_2 \eta_v}\cot(180° - \beta_2), \tag{2.20.4}$$

sustituyendo valores, resulta

$$v_{u2}^2 + 20{,}15\, v_{u2} - 558 = 0, \tag{2.20.5}$$

de donde se obtiene

$$v_{u2} = 15{,}61 \text{ m s}^{-1},$$

y de la ecuación (2.20.4),

$$u_2 = 35{,}76 \text{ m s}^{-1}.$$

Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete,

$$\beta_1 = 180° - \arctan\left(\frac{v_{m1}}{u_1}\right), \tag{2.20.6}$$

y teniendo en cuenta que

$$v_{m_1} = \frac{Q}{\pi b_1 D_1 \eta_v}, \tag{2.20.7}$$

y

$$u_1 = u_2 \frac{D_1}{D_2}, \tag{2.20.8}$$

se obtiene, sustituyendo valores,

$$\boxed{\beta_1 = 145{,}1°.}$$

El rendimiento manométrico es

$$\eta_m = \frac{H_m}{H_{uz}}. \tag{2.20.9}$$

Sustituyendo valores (de la ecuación (2.20.3) se obtiene $H_{uz} = 43{,}23$ m), resulta

$$\boxed{\eta_m = 0{,}81.}$$

Problema 2.21. Cálculo del ángulo de salida de los álabes del rodete (I)

Se quiere diseñar el rodete de una bomba centrífuga con diámetros interior y exterior $D_1 = 120$ mm y $D_2 = 280$ mm, anchuras de los álabes en las secciones de entrada y salida $b_1 = 50$ mm y $b_2 = 30$ mm, y ángulo de los álabes en la sección de entrada $\beta_1 = 170°$. La bomba debe proporcionar un

caudal $Q = 40\,\mathrm{l\,s^{-1}}$ y una altura manométrica $H_m = 55$ m. Se supondrán unos rendimientos manométrico, orgánico y volumétrico $\eta_m = 0{,}87$, $\eta_o = 0{,}94$ y $\eta_v = 0{,}96$, y un coeficiente de disminución de trabajo $\mu = 0{,}87$. El agua debe entrar en el rodete radialmente y sin choque.

Determinar:

a) Ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida.

b) Momento de giro en el eje.

Solución

a) $\beta_2 = 162{,}1°$.

b) $M = 131{,}6$ N m.

Problema 2.22. Bomba radial con difusor de álabes. Efecto de variación del ángulo de entrada de los álabes del rodete

Una bomba de flujo radial proporciona un caudal $Q = 38\,\mathrm{l\,s^{-1}}$ y una altura manométrica $H_m = 54$ m. Los diámetros interior y exterior del rodete son $D_1 = 122$ mm y $D_2 = 285$ mm, y las anchuras de sus álabes en las secciones de entrada y salida son $b_1 = 48$ mm y $b_2 = 28$ mm. Se supondrán unos rendimientos manométrico, orgánico y volumétrico $\eta_m = 0{,}85$, $\eta_o = 0{,}96$ y $\eta_v = 0{,}96$. Se supondrá que el agua entra en el rodete con un ángulo $\alpha_1 = 90°$. El difusor está provisto de álabes y tiene un diámetro exterior $D_4 = 340$ mm y secciones de entrada y salida de anchuras $b_3 = 30$ mm y $b_4 = 35$ mm, siendo $D_3 \approx D_2$.[3] Se supondrá que los álabes del rodete guían perfectamente el flujo en la sección de salida.

a) Calcular el ángulo β_1 que deben tener los álabes del rodete en la sección de entrada y la velocidad de giro del rodete necesaria para que el agua entre en el rodete sin choque, cuando el ángulo de los álabes en la sección de salida es $\beta_2 = 163°$.

Supóngase en lo que sigue que se construye una bomba con las mismas características y condiciones de funcionamiento indicadas en el enunciado y

en el apartado anterior, excepto en lo que se refiere al ángulo β_1, que ahora se supondrá igual a 168°.

Determinar (suponiendo de nuevo que el agua entra en el rodete sin choque):

b) Velocidad de giro del rodete y ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida.

c) Momento de giro en el eje. Coméntese el resultado.

d) Ángulo de entrada de los álabes del difusor necesario para que el agua entre en este sin choque.

e) Velocidad en la sección de salida del difusor (supóngase que el momento de fuerzas sobre el difusor es nulo).

Solución

a) De las ecuaciones

$$Q = v_{r2}\pi D_2 b_2 \eta_v,$$

$$H_m = H_u \eta_m,$$

$$H_u = \frac{u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}}{g},$$

$$v_{u1} = 0,$$

$$180 - \beta_2 = \arctan \frac{v_{r2}}{u_2 - v_{u2}},$$

se obtiene una ecuación de segundo grado para u_2, de la que resulta

$$u_2 = 27{,}68 \text{ m s}^{-1}.$$

A partir de las ecuaciones siguientes:

$$u_1 = u_2 \frac{D_1}{D_2},$$

$$n = \frac{u_1}{\frac{D_1}{2}} \frac{60}{2\pi},$$

$$Q = v_{r1}\pi D_1 b_1 \eta_v,$$

[3] Subíndices 1: entrada al rodete, 2: salida del rodete, 3: entrada al difusor, 4: salida del difusor.

$$180 - \beta_1 = \arctan \frac{v_{r1}}{u_1},$$

se obtiene

$$\boxed{\beta_1 = 169{,}7°,}$$

y

$$\boxed{n = 1855 \text{ rpm.}}$$

b) De la ecuación

$$180 - \beta_1 = \arctan \frac{v_{r1}}{u_1},$$

teniendo en cuenta que v_{r1} tiene el mismo valor que en el apartado anterior, resulta

$$u_1 = 10{,}12 \text{ m s}^{-1},$$

con lo que se obtiene

$$\boxed{n = \frac{u_1}{\frac{D_1}{2}} \frac{60}{2\pi} = 1585 \text{ rpm.}}$$

Por otra parte,

$$u_2 = u_1 \frac{D_2}{D_1} = 23{,}65 \text{ m s}^{-1},$$

y v_{r2} y H_u tienen los mismos valores del apartado anterior, con lo que resulta

$$v_{u2} = \frac{gH_u}{u_2} = 26{,}36 \text{ m s}^{-1},$$

y

$$\boxed{\beta_2 = \arctan \frac{v_{r2}}{v_{u2} - u_2} = 30{,}24°.}$$

c) La potencia en el eje es

$$\dot{W}_t = \frac{1}{\eta_o \eta_v} \rho Q g H_u = 25{,}70 \text{ kW},$$

y el momento de giro,

$$\boxed{M = \frac{\dot{W}_t}{n \frac{2\pi}{60}} = 154{,}9 \text{ N m.}}$$

d) Teniendo en cuenta que el caudal a través del difusor es

$$Q_d = \eta_v Q_r,$$

siendo Q_r el caudal a través del rodete, y que

$$v_{u3} = v_{u2}$$

(lo que resulta de la conservación del momento cinético, teniendo en cuenta que $D_3 \approx D_2$), el ángulo de entrada de los álabes del difusor es

$$\boxed{\alpha_3 = \arctan \frac{v_{r2} \dfrac{b_2}{b_3} \eta_v}{v_{u2}} = 3{,}073^\circ.}$$

e) De la ecuación de conservación del momento cinético, teniendo en cuenta que se ha supuesto que no se ejerce momento sobre el difusor, resulta

$$v_{u4} D_4 = v_{u2} D_2,$$

de donde se obtiene $v_{u4} = 22{,}09\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Por otra parte,

$$Q = v_{r4} \pi D_4 b_4,$$

de donde resulta $v_{r4} = 1{,}016\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, con lo que se obtiene

$$\boxed{v_4 = 22{,}12\ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

Problema 2.23. Cálculo del ángulo de salida de los álabes del rodete (II)

Una bomba centrífuga, con un rodete de diámetros interior y exterior $D_1 = 100$ mm y $D_2 = 300$ mm, y anchuras de las secciones de entrada y salida $b_1 = 25$ mm y $b_2 = 10$ mm, suministra un caudal $Q = 20\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ girando a 1750 rpm. La curva característica de la bomba es $H_m = 60\left[1 - (Q/0{,}042)^2\right]$ (H_m en m y Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$). Se supondrá $\eta_v = 0{,}88$, $\eta_o = 0{,}92$, $\eta_m = 0{,}85$ y $\mu = 1$, y que el agua entra en el rodete radialmente. Determinar la potencia consumida por la bomba y el ángulo de salida de los álabes del rodete, β_2.

Solución

$\dot{W}_t = 13{,}23$ kW; $\beta_2 = 163{,}2^\circ$.

Problema 2.24. Análisis de una bomba centrífuga y del acoplamiento en paralelo de dos bombas idénticas funcionando con diferentes velocidades

Una bomba centrífuga eleva agua entre dos depósitos abiertos a la atmósfera. La altura entre las superficies libres de los dos depósitos es de 30 m. Las tuberías de aspiración e impulsión tienen diámetros iguales, $D_a = D_i = 15$ cm, y longitudes $L_a = 3$ m y $L_i = 50$ m, respectivamente; en ambas tuberías se supondrá un factor de fricción $f = 0{,}02$. La suma de los coeficientes de pérdida de carga local se supondrá igual a 3 (este valor no incluye la pérdida de energía cinética del chorro de salida en el depósito superior). La curva característica de la bomba, para la velocidad nominal $\Omega = 160$ rad s^{-1}, puede aproximarse por la ecuación

$$H_m = 50[1 - (Q/0{,}08)^2]$$

(H_m en m, Q en m^3 s^{-1}). Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 200$ mm y $D_2 = 300$ mm, y las anchuras de los álabes en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 40$ mm y $b_2 = 20$ mm (supóngase despreciable la reducción del área de paso debida al espesor de los álabes en las secciones de entrada y salida). Los álabes del rodete están curvados hacia atrás, siendo $\beta_2 = 147°$. El agua entra en el rodete radialmente. Los rendimientos manométrico y orgánico son $\eta_m = 0{,}8$ y $\eta_o = 0{,}95$, respectivamente, y el caudal de fugas internas estimado es $Q_{fi} = 0{,}02\,Q$; no existen fugas externas. Determinar:

a) Caudal y altura manométrica.

b) Potencia en el eje de la bomba.

c) Ángulo óptimo de los álabes del rodete en la sección de entrada para evitar pérdidas por choque.

d) Coeficiente de disminución de trabajo.

Supóngase que se acopla en paralelo con la bomba anterior una bomba idéntica que gira a una velocidad un 20% superior a la nominal.

e) Determinar el caudal y la altura manométrica que proporciona cada una de las bombas. Se supondrá que la curva característica de la instalación no varía. (Se recomienda plantear claramente el sistema de ecuaciones necesario, sin sustituir valores numéricos, antes de iniciar el proceso iterativo para su resolución.)

Solución

a) A partir de la ecuación de conservación de la energía mecánica aplicada entre las superficies libres de ambos depósitos,

$$H_m = z_2 - z_1 + \frac{8\,Q^2}{\pi^2 g D^4}\left(f_a\frac{L_a}{D} + K_a + f_i\frac{L_i}{D} + K_i + 1\right), \tag{2.24.1}$$

donde $z_2 - z_1 = 30$ m, $K_a + K_i = 3$, $Q_a = Q_i = Q$ (al no haber fugas externas en la bomba) y $D_a = D_i = D$, y de la curva característica de la bomba, $H_m = 50[1 - (Q/0{,}08)^2]$, se deduce

$$\boxed{Q = 0{,}04560\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}}$$

y

$$\boxed{H_m = 33{,}76\ \mathrm{m}.}$$

b) La potencia total viene dada por

$$\dot{W}_t = \frac{1}{\eta_t}\,\rho g Q H_m,$$

donde $\eta_t = \eta_o \eta_v \eta_m$, siendo

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + Q_f} = 0{,}9804.$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\dot{W}_t = 20{,}27\ \mathrm{kW}.}$$

c) El ángulo óptimo de los álabes del rodete en la sección de entrada es

$$\beta_1 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{v_{m1}}{u_1}\right).$$

Sustituyendo

$$v_{m1} = \frac{Q}{\pi b_1 D_1 \eta_v} = 1{,}851\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

y

$$u_1 = \Omega D_1/2 = 16\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

resulta

$$\boxed{\beta_1 = 173{,}4°.}$$

d) La componente acimutal de la velocidad absoluta en la sección de salida correspondiente a un número infinito de álabes, v_{u2}, se obtiene del triángulo de velocidades en dicha sección, de donde se deduce

$$v_{u2} = u_2 - \frac{v_{m2}}{\tan(180° - \beta_2)} = 20{,}20\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

siendo

$$v_{m2} = \frac{Q}{\pi b_2 D_2 \eta_v} = 2{,}467\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

y

$$u_2 = \Omega D_2/2 = 24\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

El valor correspondiente a un número finito de álabes, v'_{u2}, vendrá dado por la ecuación de Euler,

$$v'_{u2} = \frac{H_{uz} g}{u_2} = \frac{H_m g}{\eta_m u_2} = 17{,}25\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

El coeficiente de disminución de trabajo resulta finalmente

$$\boxed{\mu = \frac{v'_{u2}}{v_{u2}} = 0{,}8538.}$$

e) La nueva situación de funcionamiento está determinada, además de por la ecuación (2.24.1), por las siguientes ecuaciones:

$$H_{m1} = 50\left[1 - \left(\frac{Q_1}{0{,}08}\right)^2\right], \tag{2.24.2}$$

$$H_{m2} = (1{,}2)^2(50)\left\{1 - \left[\frac{Q_2}{(1{,}2)(0{,}08)}\right]^2\right\} \tag{2.24.3}$$

(expresión obtenida aplicando análisis dimensional),

$$H_m = H_{m1} = H_{m2}, \tag{2.24.4}$$

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{2.24.5}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.24.4), Q_1 y Q_2 se pueden expresar en función de Q a partir de las ecuaciones (2.24.1) y (2.24.2), y (2.24.1) y (2.24.3), respectivamente. Introduciendo las expresiones obtenidas en la ecuación (2.24.5) y sustituyendo valores, resulta

$$Q - \sqrt{\frac{20 - 1806\,Q^2}{7812}} - \sqrt{\frac{42 - 1806\,Q^2}{7812}} = 0.$$

Iterando, se obtiene

$$Q = 0{,}08782\ \mathrm{m^3\,s^{-1}},$$

y a partir de este valor,

$$\boxed{H_m = 43{,}93\ \mathrm{m},}$$

$$\boxed{Q_1 = 0{,}02788\ \mathrm{m^3\,s^{-1}},}$$

$$\boxed{Q_2 = 0{,}05994\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

Problema 2.25. Análisis de una bomba centrífuga (VI)

Una bomba centrífuga proporciona en su punto de funcionamiento nominal un caudal $Q = 30\,\mathrm{l\,s^{-1}}$ y una altura manométrica $H_m = 60$ m, con rendimientos manométrico, volumétrico y orgánico $\eta_m = 0{,}87$, $\eta_v = 0{,}97$ y $\eta_o = 0{,}92$, respectivamente (se supondrá que las fugas de caudal son internas). Los diámetros interior y exterior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 100$ mm y $D_2 = 200$ mm, y las anchuras de sus álabes en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 40$ mm y $b_2 = 20$ mm. Los álabes del rodete están curvados hacia atrás, siendo $\beta_2 = 150°$.

El difusor está provisto de álabes con anchuras en las secciones de entrada y salida $b_3 = 22$ mm y $b_4 = 25$ mm, respectivamente, y tiene un diámetro interior $D_3 \approx D_2$.[4]

El coeficiente de disminución de trabajo es $\mu = 0{,}85$. El agua entra en el rodete y en el difusor sin choque. La componente acimutal de la velocidad a la entrada del rodete es nula. Las pérdidas en el rodete, difusor y voluta son, respectivamente,

$$H_{L,\mathrm{r}} = 0{,}07\,H_m,$$

$$H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}25(v_3^2 - v_4^2)/(2g),$$

$$H_{L,\mathrm{v}} = 0{,}1\,v_4^2/(2g).$$

Calcular:

a) Velocidad de giro del rodete.

b) Potencia eléctrica consumida por el motor eléctrico que acciona la bomba si su rendimiento es $\eta_e = 0{,}93$.

c) Ángulo de entrada de los álabes del rodete.

d) Ángulo de entrada de los álabes del difusor.

e) Alturas de pérdidas en el difusor y en la voluta.

f) Diámetro exterior del difusor D_4. (Supóngase despreciable el momento de giro que se ejerce sobre el difusor.)

g) Incremento de presión en el difusor.

Solución

a) De las ecuaciones

$$H_{uz} = \mu \frac{v_{u2} u_2}{g} = \frac{H_m}{\eta_m},$$

$$v_{u2} = u_2 - \frac{v_{m2}}{\tan(180° - \beta_2)}$$

y

$$v_{m2} = \frac{Q}{\pi b_2 D_2 \eta_v},$$

se obtiene

$$u_2^2 - 4{,}263 u_2 - 795{,}9 = 0,$$

de donde resulta $u_2 = 30{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y, finalmente,

$$\boxed{n = \frac{60 u_2}{\pi D_2} = 2905\ \mathrm{rpm}.}$$

b) La potencia eléctrica consumida es

$$\dot{W}_e = \frac{1}{\eta_e} \dot{W}_t = \frac{1}{\eta_e \eta_t} \rho g Q H_m.$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\dot{W}_e = 24{,}46\ \mathrm{kW}.}$$

[4] Subíndices 1: entrada al rodete, 2: salida del rodete, 3: entrada al difusor, 4: salida del difusor.

c) Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete, se deduce

$$\beta_1 = 180° - \arctan \frac{v_{m1}}{u_1}.$$

Sustituyendo

$$u_1 = u_2 \frac{D_1}{D_2} = 15{,}21 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$v_{m1} = \frac{Q}{\pi b_1 D_1 \eta_v} = 2{,}46 \text{ m s}^{-1},$$

se obtiene

$$\boxed{\beta_1 = 170{,}8°.}$$

d) Del triángulo de velocidad a la entrada del difusor, se deduce

$$\alpha_3 = \arctan \frac{v_{m3}}{v_{u3}}.$$

Sustituyendo

$$v_{m3} = \frac{Q}{\pi b_3 D_3} = 2{,}17 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$v_{u3} = v'_{u2} = \mu v_{u2} = 22{,}24 \text{ m s}^{-1},$$

resulta

$$\boxed{\alpha_3 = 5{,}57°.}$$

e) De la relación

$$H_{uz} - H_m = H_L = H_{L,\text{r}} + H_{L,\text{d}} + H_{L,\text{v}},$$

se obtiene

$$H_{L,\text{d}} + H_{L,\text{v}} = 4{,}766 \text{ m}.$$

Por otro lado,

$$H_{L,\text{d}} + H_{L,\text{v}} = 0{,}25 \frac{v_3^2 - v_4^2}{2g} + 0{,}1 \frac{v_4^2}{2g} \qquad (2.25.1)$$

y

$$v_3 = \sqrt{v_{u3}^2 + v_{m3}^2} = 22{,}35 \text{ m s}^{-1}.$$

Despejando y sustituyendo valores, de la ecuación (2.25.1) resulta

$$v_4 = 14{,}46 \text{ m s}^{-1}.$$

Con este valor se obtiene finalmente

$$\boxed{H_{L,\text{d}} = 3{,}7 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{H_{L,\text{v}} = 1{,}06 \text{ m}.}$$

f) Sustituyendo

$$v_{u4} = v_{u3}\frac{D_3}{D_4}$$

(expresión que resulta de la conservación del momento cinético) y

$$v_{m4} = \frac{Q}{\pi b_4 D_4 \eta_v}$$

en

$$v_4^2 = v_{u4}^2 + v_{m4}^2,$$

se obtiene una expresión de la que se deduce

$$\boxed{D_4 = 0{,}310 \text{ m}.}$$

g) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica al difusor, resulta

$$\left[\frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g}\right] - \left[\frac{p_4}{\rho g} + \frac{v_4^2}{2g}\right] = H_{L,\mathrm{d}},$$

de donde se obtiene

$$\boxed{p_3 - p_4 = -108{,}9 \text{ kPa}.}$$

Problema 2.26. Curvas características y puntos de funcionamiento singulares

La curva característica ideal de una bomba centrífuga, para una determinada velocidad de giro Ω, viene dada por la ecuación $H_{u\infty} = 35 - 200\,Q$, y las curvas de pérdidas por fricción y por choque, por $H_f = 800\,Q^2$ y $H_{ch} = 2000\,Q^2 - 240\,Q + 7{,}2$, respectivamente ($Q$ en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y H en m). Los diámetros interior y exterior del rodete son $D_1 = 0{,}1$ m y $D_2 = 0{,}25$ m, y los ángulos de los álabes a la entrada y salida del rodete, $\beta_1 = 160°$ y $\beta_2 = 150°$ respectivamente. El coeficiente de disminución de trabajo, calculado teniendo en cuenta la correlación de Pfleiderer, es $\mu = 0{,}7$. El agua entra en el rodete radialmente. Supóngase que no existen fugas de caudal. Determinar:

a) Caudal nominal (caudal para el que no se producen pérdidas por choque), velocidad de giro del rodete y anchura de los álabes del rodete en la sección de salida.

b) Número de álabes del rodete.

c) Triángulos de velocidades en las secciones de entrada y salida del rodete para el caudal nominal, correspondientes a un número infinito de álabes.

d) Caudales para los que la altura manométrica y el rendimiento manométrico alcanzan un valor máximo.

e) Triángulos de velocidades en las secciones de entrada y salida del rodete para el punto de funcionamiento de máximo rendimiento, correspondientes a un número infinito de álabes. Comparar estos triángulos con los obtenidos en el apartado c).

f) Curva característica real de la bomba para una velocidad de giro 2Ω.

Solución

a) Para el caudal nominal las pérdidas por choque son nulas, por lo que, igualando a cero H_{ch}, resulta $2000\,Q_n^2 - 240\,Q_n + 7{,}2 = 0$, de donde se obtiene

$$\boxed{Q_n = 0{,}06\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

Expresando $H_{u\infty}$ en función de la velocidad de giro y el caudal, resulta

$$\begin{aligned} H_{u\infty} = \frac{u_2 v_{u2}}{g} &= \frac{u_2}{g}\left[u_2 - \frac{v_{m2}}{\tan(180^\circ - \beta_2)}\right] \\ &= \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2}{\eta_v \pi b_2 D_2 g \tan(180^\circ - \beta_2)}\,Q. \end{aligned}$$

Igualando los dos sumandos del último miembro de la ecuación anterior con los correspondientes de la curva característica ideal de la bomba indicada en el enunciado, $H_{u\infty} = 35 - 200\,Q$, se obtiene $u_2 = 18{,}53\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y

$$\boxed{b_2 = 2{,}083 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}.}$$

La velocidad de giro resulta

$$\boxed{n = u_2 60/(\pi D_2) = 1416\ \mathrm{rpm}.}$$

b) Introduciendo

$$g H_{uz} = v'_{u2} u_2$$

y

$$\chi = (v_{u2} - v'_{u2})/u_2$$

(teniendo en cuenta que $v'_{u2} = \mu v_{u2}$) en la correlación de Pfleiderer (ecuaciones (A.3.58) y (A.3.59)), y despejando, resulta

$$Z = \frac{1{,}2\,(1 + \operatorname{sen}\beta_2)}{\left(\dfrac{1}{\mu} - 1\right)\left[1 - \left(\dfrac{D_1}{D_2}\right)^2\right]}$$

(obsérvese que en la expresión resultante no intervienen ni la velocidad de giro ni el caudal ni la altura). Sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{Z = 5 \text{ álabes.}}$$

c) Para el caudal nominal, $H_{u\infty} = 23$ m. En la sección de salida del rodete,

$$\boxed{v_{u2} = \frac{gH_{u\infty}}{u_2} = 12{,}18 \text{ m s}^{-1},}$$

$$\boxed{v_{m2} = (u_2 - v_{u2}) \tan(180° - \beta_2) = 3{,}668 \text{ m s}^{-1}}$$

y

$$\boxed{\alpha_2 = \arctan\left(\frac{v_{m2}}{v_{u2}}\right) = 16{,}76°.}$$

En la sección de entrada al rodete,

$$\boxed{v_{u1} = 0,}$$

con lo que

$$\boxed{\alpha_1 = 90°.}$$

Por otra parte,

$$\boxed{u_1 = u_2 D_1/D_2 = 7{,}412 \text{ m s}^{-1}}$$

y

$$\boxed{v_{m1} = u_1 \tan(180° - \beta_1) = 2{,}698 \text{ m s}^{-1}.}$$

d) La altura manométrica es

$$H_m = \mu H_{u\infty} - H_{ch} - H_f = -2800\,Q^2 + 100\,Q + 17{,}3. \qquad (2.26.1)$$

Imponiendo $\mathrm{d}H_m/\mathrm{d}Q = 0$, se obtiene el caudal correspondiente al punto de funcionamiento de máxima altura manométrica,

$$\boxed{Q = 1{,}786 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.}$$

El rendimiento manométrico es

$$\eta_m = \frac{H_m}{\mu H_{u\infty}} = \frac{-2800\,Q^2 + 100\,Q + 17{,}3}{24{,}5 - 140\,Q}.$$

Compruébese que el rendimiento máximo se alcanza para

$$\boxed{Q = 0{,}04011\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

En la Figura 2.26.1 se representan las curvas características de la bomba.

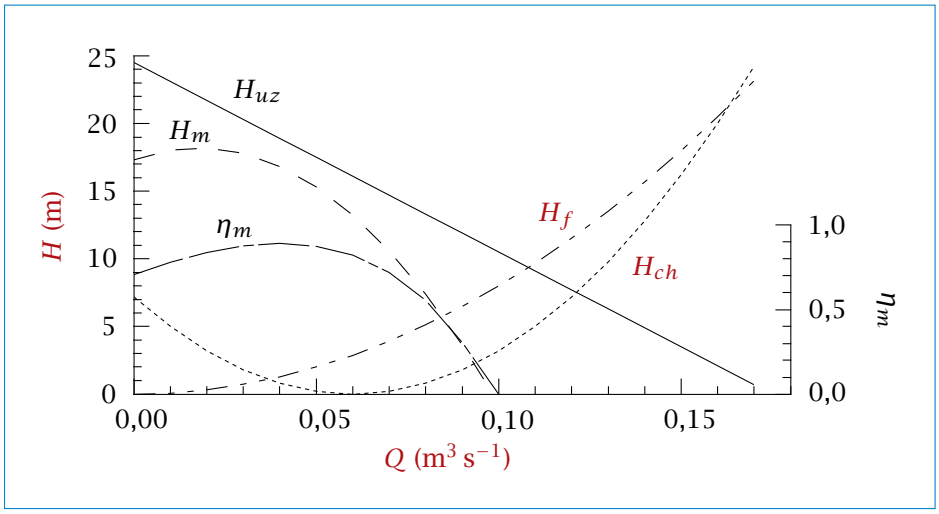


Figura 2.26.1
Curvas características de la bomba.

e) Para el caudal correspondiente al punto de máximo rendimiento, la altura $H_{u\infty} = 26{,}98$ m. En la sección de salida del rodete,

$$\boxed{v_{u2} = gH_{u\infty}/u_2 = 14{,}28\ \mathrm{m\,s^{-1}},}$$

$$\boxed{v_{m2} = (u_2 - v_{u2})\tan(180^\circ - \beta_2) = 2{,}452\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

y

$$\boxed{\alpha_2 = \arctan(v_{m2}/v_{u2}) = 9{,}740^\circ}$$

(obsérvese que en la sección de salida la velocidad relativa correspondiente a un número infinito de álabes sigue siendo tangente al álabe). En la sección de

entrada, la componente meridiana de la velocidad es

$$\boxed{v_{m1} = v_{m1,n} Q/Q_n = 1{,}803 \text{ m s}^{-1},}$$

siendo $v_{m1,n}$ el valor correspondiente al caudal nominal. Al ser el caudal distinto del nominal, la velocidad relativa del agua a la entrada del rodete no es tangente al álabe, por lo que el ángulo que forma la velocidad relativa con la de arrastre,

$$\boxed{\beta_1' = 180° - \arctan(v_{m1}/u_1) = 166{,}3°,}$$

no coincide con el ángulo de los álabes.

En la Figura 2.26.2 se han representado los triángulos de velocidades correspondientes a un número infinito de álabes para los dos caudales considerados.

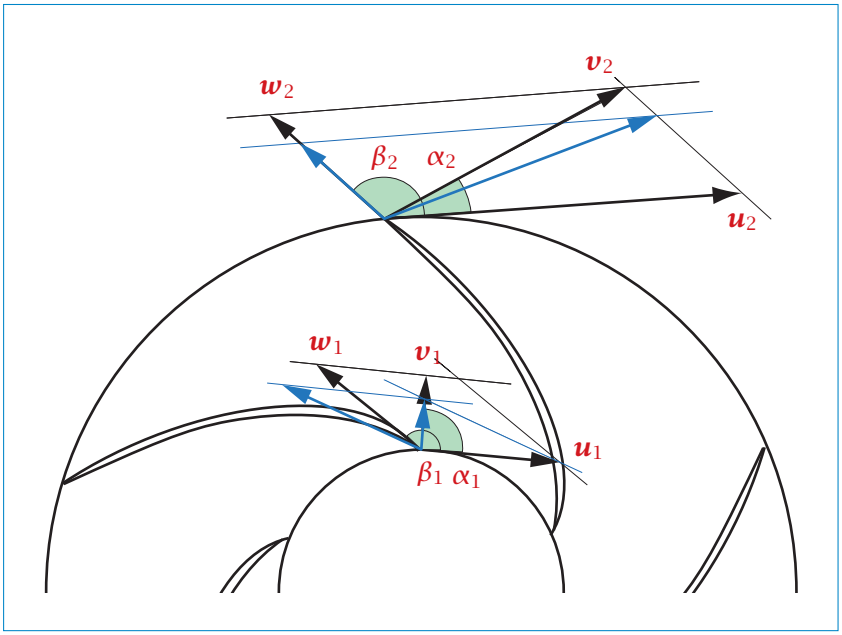


Figura 2.26.2
Triángulos de velocidades correspondientes al punto de funcionamiento nominal (vectores en color negro) y al de máximo rendimiento (vectores en color azul).

f) Para cada punto de funcionamiento (H_m, Q) de la curva característica correspondiente a la velocidad de giro $\Omega = n2\pi/60 = 148{,}2 \text{ rad s}^{-1}$, existe un punto

de funcionamiento semejante, $(H_{m,2\Omega}, Q_{2\Omega})$, en la curva correspondiente a la velocidad de giro 2Ω. Las condiciones de semejanza son las siguientes:

$$\frac{Q}{\Omega D^3} = \frac{Q_{2\Omega}}{2\Omega D^3},$$
$$\frac{\Delta p_t}{\rho \Omega^2 D^2} = \frac{\Delta p_{t,2\Omega}}{\rho (2\Omega)^2 D^2},$$

siendo $\Delta p_t = \rho g H_m$ y $\Delta p_{t,2\Omega} = \rho g H_{m,2\Omega}$. Introduciendo $Q = Q_{2\Omega}/2$ y $H_m = H_{m,2\Omega}/4$ en la curva de característica correspondiente a la velocidad de giro Ω, dada por la ecuación (2.26.1), se obtiene

$$\boxed{H_{m,2\Omega} = -2800\, Q_{2\Omega}^2 + 200\, Q_{2\Omega} + 69{,}2,}$$

que es la curva correspondiente a una velocidad de giro del rodete 2Ω.

Problema 2.27. Modificación del punto de funcionamiento

En una instalación hidráulica se eleva agua entre dos depósitos de grandes dimensiones abiertos a la atmósfera, entre cuyas superficies libres existe una diferencia de altura de 20 m. Las pérdidas en la instalación se han estimado en

$$H_\varphi = 50\,000\, Q^2$$

(H_φ en m; Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$).

Para elevar el agua se utiliza una bomba centrífuga cuya curva característica, para una velocidad de giro $n = 1000$ rpm, es

$$H_m = 50\left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}04}\right)^2\right]$$

(H_m en m; Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$).

El rodete tiene un diámetro de 60 cm, una anchura de los álabes en la sección de salida de 15 mm y un ángulo de salida de estos $\beta_2 = 176°$. Considérese en todas las situaciones que se describen en lo que sigue unos rendimientos orgánico y volumétrico $\eta_o = \eta_v = 0{,}9$ y un coeficiente de disminución de trabajo $\mu = 0{,}7$.

a) Determinar el caudal bombeado y la potencia total consumida por la bomba cuando esta funciona a una velocidad de giro $n = 1000$ rpm.

Supóngase a continuación que se quiere fijar el caudal de la instalación en $Q' = 0{,}01\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Para ello se consideran dos opciones: la primera consiste en modificar la velocidad de giro de la bomba y la segunda en colocar una válvula en la tubería de impulsión de la bomba.

b) Determinar, para la primera opción, la nueva curva característica de la bomba y la potencia total consumida por esta.

c) Determinar, para la segunda opción, la nueva curva característica de la instalación y la potencia total consumida por la bomba.

d) Teniendo en cuenta que el rendimiento manométrico es muy similar en los tres casos de los apartados a), b) y c), indicar razonadamente a qué se deben las diferencias en la potencia consumida.

Solución

a) Del sistema de ecuaciones

$$H_i = 20 + 50\,000\,Q^2,$$

$$H_m = 50 - 31\,250\,Q^2,$$

imponiendo $H_m = H_i$, se obtiene

$$\boxed{Q = Q_0 = 0{,}01922\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}}$$

y $H_m = H_i = H_0 = 38{,}46$ m. Este punto de funcionamiento, (H_0, Q_0), se ha representado en las figuras que se incluyen en los dos apartados siguientes.

Del triángulo de velocidades a la salida del rodete, se obtiene

$$v_{u2} = u_2 - v_{m2}/\tan(180° - \beta_2) = 20{,}62\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

siendo

$$v_{m2} = Q/(\eta_v \pi b_2 D_2) = 0{,}7551\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

y

$$u_2 = n\pi D_2/60 = 31{,}42\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La altura útil es

$$H_{uz} = \mu v_{u2} u_2/g = 46{,}22\ \mathrm{m}$$

y la potencia en el eje,

$$\boxed{\dot{W}_t = \rho g Q H_{uz}/(\eta_v \eta_o) = 10{,}76\ \mathrm{kW}.}$$

b) La curva característica de la instalación sigue siendo en este caso

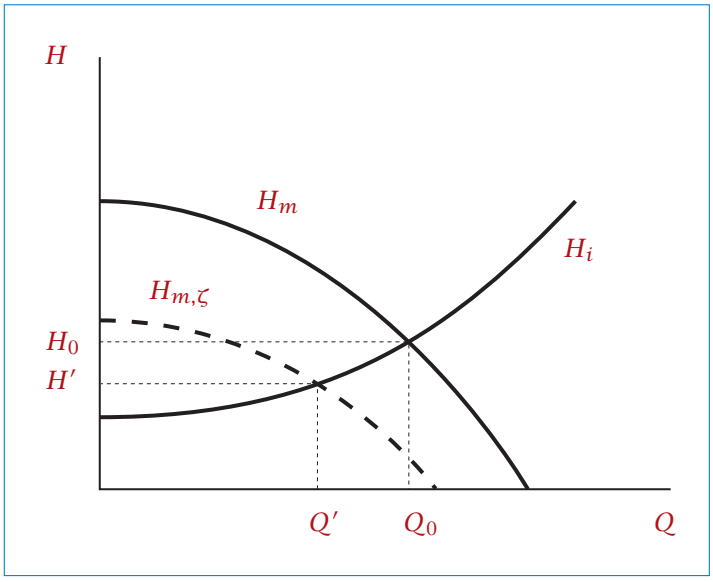
$$H_i = 20 + 5 \times 10^4\, Q^2.$$

Para conseguir el nuevo caudal Q', se debe reducir la velocidad de giro de la bomba, que pasará a ser $n' = \zeta n$, siendo ζ una constante menor que la unidad, de forma que la curva característica de la bomba pase a ser

$$H_{m,\zeta} = 50\,\zeta^2 \left[1 - \left(\frac{Q}{0{,}04\,\zeta}\right)^2\right].$$

De las ecuaciones anteriores, imponiendo $H_i = H_{m,\zeta}$ y $Q = Q'$, se obtiene $\zeta = 0{,}75$ y $H' = H_i = H_{m,\zeta} = 25$ m. La velocidad de arrastre a la salida del rodete resulta

$$u_2' = \zeta u_2 = 23{,}56 \text{ m s}^{-1}.$$



La potencia en el eje, en las condiciones de este apartado, resulta

$$\dot{W}_t' = \frac{\rho g Q' H_{uz}'}{\eta_o \eta_v} = \frac{\rho Q' \mu u_2'}{\eta_o \eta_v}\left(u_2' - \frac{Q'}{\eta_v \pi b_2 D_2 \tan(180^\circ - \beta_2)}\right) = 3{,}653 \text{ kW}.$$

c) En este caso, la curva característica de la bomba es la indicada en el enunciado para la velocidad de giro n,

$$H_m = 50 - 31\,250\,Q^2,$$

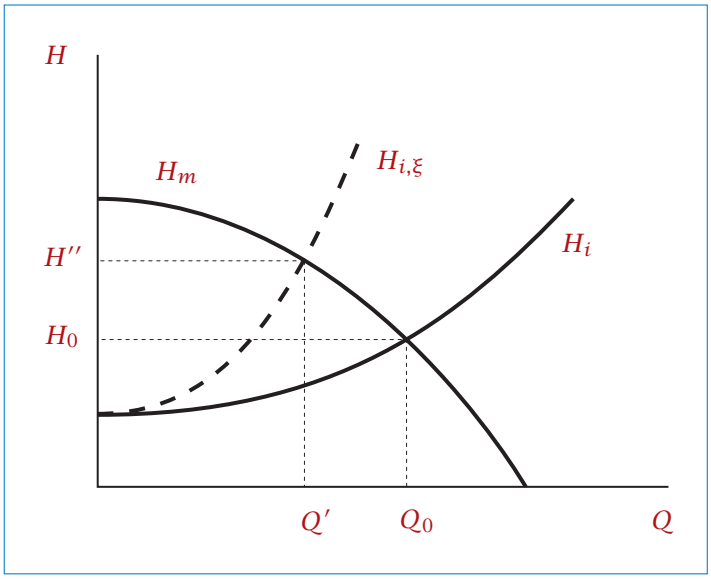
y la nueva curva de la instalación tendrá la forma

$$\boxed{H_{i,\xi} = 20 + \xi Q^2,}$$

siendo ξ una constante positiva ($\xi > 5\times10^4$). De las ecuaciones anteriores, imponiendo $H_{i,\xi} = H_m$ y $Q = Q'$, resulta $\xi = 2{,}688\times10^5$ y $H'' = H_{i,\xi} = H_m = 46{,}88$ m.

La potencia en el eje es en este caso

$$\boxed{\dot{W}_t'' = \frac{\rho g Q' H_{uz}''}{\eta_o \eta_v} = \frac{\rho Q' \mu u_2}{\eta_o \eta_v}\left(u_2 - \frac{Q'}{\eta_v \pi b_2 D_2 \tan(180° - \beta_2)}\right) = 7{,}004 \text{ kW}.}$$



d) El rendimiento manométrico es muy similar en los tres casos: a) $\eta_m = 0{,}8322$, b) $\eta_m = 0{,}8288$ y c) $\eta_m = 0{,}8106$. Las diferencias entre el caso a) y los casos b) y c) son debidas, obviamente, a que en el primero el caudal bombeado es casi el doble, lo que se corresponde con una mayor demanda de energía. La diferencia entre los casos b) y c), en los que el caudal bombeado es el mismo, es debida a que,

para reducir el caudal, en el segundo caso se provoca un aumento de las pérdidas de energía en la instalación, lo que supone un aumento de la altura manométrica necesaria, mientras que en el primero simplemente se reduce el régimen de giro de la bomba, lo que supone alcanzar el caudal que debe bombearse con una altura manométrica considerablemente menor, tal como se observa en las figuras de los apartados anteriores.

Capítulo 3

Turbinas Francis

Problema 3.1. Rendimiento de una turbina de flujo radial en función de los ángulos α_1 y β_1

En una turbina hidráulica de flujo radial, α_1 es el ángulo de salida de los álabes del distribuidor y β_1 el de entrada de los álabes del rodete. La velocidad absoluta a la salida del rodete es radial. Las componentes radiales de la velocidad absoluta a la entrada y a la salida del rodete son iguales. La altura de pérdidas internas en la turbina, H_L, es igual al doble de la altura correspondiente a la energía cinética del agua a la salida del rodete. Expresar el rendimiento hidráulico de la turbina en función de los ángulos α_1 y β_1.

Solución

El rendimiento hidráulico de una turbina se define en la ecuación (A.3.26), que también puede escribirse como sigue:

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \dfrac{H_L}{H_u}}. \tag{3.1.1}$$

De acuerdo con lo indicado en el enunciado,

$$H_L = 2\,\frac{v_2^2}{2g}. \tag{3.1.2}$$

También se indica que la velocidad absoluta a la salida del rodete solo tiene componente radial ($v_2 = v_{r2}$), y que las componentes radiales de la velocidad absoluta a la entrada y a la salida del rodete son iguales ($v_{r2} = v_{r1}$), con lo que la ecuación (3.1.2) queda de la forma

$$H_L = \frac{v_{r1}^2}{g}. \tag{3.1.3}$$

Por otra parte, al ser $v_{u2} = 0$, la ecuación (A.3.44) de Euler se reduce a

$$H_u = \frac{u_1 v_{u1}}{g}. \tag{3.1.4}$$

Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete, se obtiene

$$v_{u1} = \frac{v_{r1}}{\tan \alpha_1}, \tag{3.1.5}$$

$$u_1 = v_{u1} + \frac{v_{r1}}{\tan(180° - \beta_1)} = v_{r1}\left[\frac{1}{\tan \alpha_1} + \frac{1}{\tan(180° - \beta_1)}\right]. \tag{3.1.6}$$

Introduciendo las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.6) en la ecuación (3.1.4), y esta, a su vez, junto con la ecuación (3.1.3), en la ecuación (3.1.1), resulta finalmente

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \dfrac{\tan^2 \alpha_1 \tan \beta_1}{\tan \beta_1 - \tan \alpha_1}}.$$

Problema 3.2. Cálculo de los ángulos de salida de los álabes del distribuidor y del rodete

Una turbina de flujo radial tiene un rodete de diámetro exterior $D_1 = 38$ cm y diámetro interior $D_2 = 26$ cm. Las anchuras de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida son, respectivamente, $b_1 = 6$ cm y $b_2 = 18$ cm. El área de la sección de paso en la entrada del rodete se reduce en un 5 % debido a la presencia de los álabes. El ángulo de los álabes del rodete en la sección de entrada es $\beta_1 = 90°$. El agua sale del rodete con una velocidad absoluta sin componente acimutal. La potencia en el eje de la turbina es de 196 kW. La velocidad de giro del rodete es $n = 950$ rpm. Los rendimientos hidráulico, volumétrico y orgánico son, respectivamente, $\eta_h = 0{,}9$, $\eta_v = 0{,}97$ y $\eta_o = 0{,}98$.

Calcular:

a) Salto neto.

b) Ángulo de salida de los álabes del distribuidor necesario para que el agua entre en el rodete sin choque.

c) Ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida.

Solución

a) La ecuación (A.3.44), teniendo en cuenta que, según se indica en el enunciado, $v_{u2} = 0$, y que, al ser $\beta_1 = 90°$, $u_1 = v_{u1}$, se reduce a

$$H_u = \frac{u_1^2}{g} = \frac{\left(950\,\frac{2\pi}{60}\,\frac{0{,}38}{2}\right)^2}{9{,}81} = 36{,}42 \text{ m}.$$

El salto neto es

$$\boxed{H_n = \frac{H_u}{\eta_h} = \frac{36{,}42}{0{,}9} = 40{,}47 \text{ m}.}$$

b) El caudal puede obtenerse a partir de la ecuación (A.3.30):

$$Q = \frac{\dot{W}_t}{\eta_t \rho g H_n} = \frac{196\,000}{(0{,}9)(0{,}97)(0{,}98)(1000)(9{,}81)(40{,}47)} = 0{,}577 \text{ m}^3\,\text{s}^{-1}.$$

Por otra parte,

$$\eta_v Q = 0{,}95\,\pi D_1 b_1 v_{r1},$$

con lo que se obtiene

$$v_{r1} = \frac{(0{,}577)(0{,}97)}{(0{,}95)\pi(0{,}38)(0{,}06)} = 8{,}226 \text{ m}\,\text{s}^{-1}.$$

Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete, resulta

$$\boxed{\alpha_1 = \arctan\frac{v_{r1}}{u_1} = \arctan\frac{8{,}226}{18{,}9} = 23{,}52°.}$$

c) Del triángulo de velocidades a la salida del rodete, resulta

$$\tan(180° - \beta_2) = \frac{v_{r2}}{u_2} = \frac{\dfrac{Q\eta_v}{\pi D_2 b_2}}{u_2} = \frac{\dfrac{(0{,}577)(0{,}97)}{\pi(0{,}26)(0{,}18)}}{950\,\dfrac{2\pi}{60}\,\dfrac{0{,}26}{2}} = 0{,}2944,$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\beta_2 = 163{,}6°.}$$

Problema 3.3. Cálculo de magnitudes en la sección de entrada del rodete y altura de pérdidas en el rodete

El rodete de una turbina Francis, con un diámetro de 1,5 m, desarrolla una potencia de 12 500 kW con un caudal de 12,3 $m^3\,s^{-1}$ y girando a una velocidad de 430 rpm.

El agua entra en el rodete sin choque, con una componente meridiana de velocidad de 9,6 $m\,s^{-1}$, y sale hacia el tubo difusor con una velocidad de 7,2 $m\,s^{-1}$, sin componente acimutal. La diferencia entre las cotas piezométricas a la entrada y salida del rodete es de 60 m. Calcular:

a) Velocidad y dirección del agua a la entrada del rodete.

b) Ángulo de entrada de los álabes del rodete.

c) Altura de pérdidas en el rodete.

Solución

a) $v_1 = 31{,}59\ m\,s^{-1}$; $\alpha_1 = 17{,}69°$.

b) 111,0°.

c) 4,61 m.

Problema 3.4. Determinación de magnitudes geométricas y análisis de pérdidas

Una turbina Francis de flujo radial proporciona una potencia en el eje $\dot{W}_t = 4000$ kW funcionando bajo un salto neto $H_n = 50$ m y girando a una velocidad $n = 250$ rpm. Los diámetros interior y exterior del rodete son $D_2 = 80$ cm y $D_1 = 160$ cm, respectivamente. La relación entre las anchuras de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida es $b_1/b_2 = 0{,}5$. El agua sale del rodete con una velocidad absoluta $v_2 = 8\ m\,s^{-1}$, sin componente acimutal. El rendimiento total es $\eta_t = 0{,}85$, el rendimiento volumétrico es $\eta_v = 0{,}98$ y el rendimiento orgánico es $\eta_o = 0{,}97$.

Determinar:

a) Ángulo de salida de los álabes del distribuidor y ángulo de entrada de los álabes del rodete.

b) Anchura de los álabes en las secciones de entrada y salida del rodete.

c) Triángulo de velocidades a la salida del rodete.

La sección de salida del tubo difusor tiene un diámetro $D_{d2} = 3$ m. La pérdida de altura en el interior del tubo difusor es $H_{L,\mathrm{d}} = 1$ m, y en el conjunto voluta-distribuidor es $H_{L,\mathrm{v-d}} = 0{,}9$ m. El salto bruto es $H_b = 54$ m. La tubería forzada tiene una longitud de 550 m y un diámetro de 2 m.

d) Calcular la altura de pérdidas en el rodete.

e) Calcular el factor de fricción en la tubería forzada.

Solución

a) El rendimiento hidráulico

$$\eta_h = \frac{\eta_t}{\eta_v \eta_o} = 0{,}894.$$

El salto útil $H_u = \eta_h H_n = (0{,}894)(50) = 44{,}71$ m. Por otra parte, la ecuación (A.3.44) de Euler se reduce a

$$H_u = \frac{u_1 v_{u1}}{g}, \tag{3.4.1}$$

al ser $v_{u2} = 0$.

Despejando v_{u1} de la ecuación (3.4.1), y sustituyendo

$$u_1 = n\frac{D_1}{2} = \frac{2\pi(250)}{60}\frac{1{,}6}{2} = 20{,}94 \text{ m s}^{-1},$$

se obtiene $v_{u1} = 20{,}94$ m s^{-1}. La componente radial v_{r1} puede obtenerse a partir de la ecuación de continuidad,

$$v_{r1} b_1 D_1 = v_{r2} b_2 D_2.$$

Teniendo en cuenta que $b_1/b_2 = 0{,}5$ y que $v_{r2} = v_2 = 8$ m s^{-1}, resulta $v_{r1} = 8$ m s^{-1}.

En la sección de entrada,

$$\tan\alpha_1 = \frac{v_{r1}}{v_{u1}},$$

de donde se obtiene un ángulo de salida de los álabes del distribuidor

$$\boxed{\alpha_1 = 20{,}91°.}$$

El ángulo de entrada de los álabes del rodete, teniendo en cuenta que

$$\tan(180° - \beta_1) = \frac{v_{r1}}{u_1 - v_{u1}},$$

resulta

$$\boxed{\beta_1 = 90{,}02°.}$$

b) El caudal es

$$Q = \frac{\dot{W}_t}{\eta_t \rho g H_n} = 9{,}594 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

El espesor de los álabes en la sección de entrada es

$$\boxed{b_1 = \frac{Q\eta_v}{\pi D_1 v_{r1}} = 0{,}2338 \text{ m},}$$

y en la sección de salida,

$$\boxed{b_2 = 2b_1 = 0{,}4676 \text{ m}.}$$

c) Al ser nula la componente acimutal de la velocidad del agua en la sección de salida del rodete,

$$\boxed{\alpha_2 = 90°,}$$

$$\boxed{v_{r2} = v_2 = 8 \text{ m s}^{-1},}$$

$$\boxed{\beta_2 = 180° - \arctan\left(\frac{v_{r2}}{u_2}\right) = 142{,}6°.}$$

d) La altura de pérdidas en el rodete viene dada por

$$\boxed{H_{L,\text{r}} = H_n - H_u - H_{L,\text{d}} - H_{L,\text{v-d}} = 3{,}391 \text{ m}.}$$

e) La diferencia entre el salto bruto y el salto neto a la entrada de la turbina es igual a la altura de las pérdidas que se producen en la tubería forzada (obsérvese que solo se dan datos para calcular las pérdidas por fricción) más la pérdida de energía cinética a la salida del difusor:

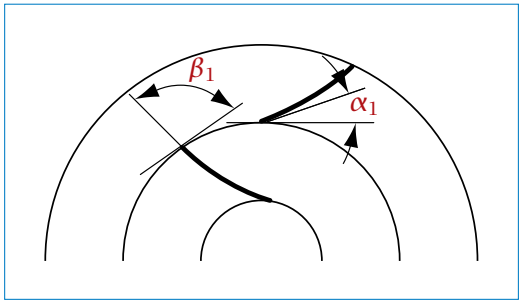
$$H_b - H_n = H_{\varphi_e} + H_{\varphi_s} = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} + \frac{v_{d2}^2}{2g},$$

donde f es el factor de fricción; $L = 550$ m y $D = 2$ m, la longitud y el diámetro de la tubería, respectivamente; $v_{d2} = Q/(\pi {D_{d2}}^2/4) = 1{,}330\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, la velocidad del agua en la sección de salida del difusor, y $v = Q/(\pi D^2/4) = 3{,}054\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, la velocidad del agua en la tubería forzada. Sustituyendo y despejando, se obtiene[1]

$$\boxed{f = 0{,}02991.}$$

Problema 3.5. Determinación de diversas magnitudes de funcionamiento en una turbina con difusor de forma troncocónica (I)

El rodete de una turbina Francis de eje vertical tiene un diámetro exterior $D_1 = 76$ cm y una sección de entrada con un área de paso efectiva $S_1 = 0{,}2\ \mathrm{m^2}$. El salto neto es $H_n = 26$ m y la velocidad de giro $n = 375$ rpm. El ángulo de salida de los álabes del distribuidor es $\alpha_1 = 15°$, y el ángulo de entrada de los álabes del rodete es $\beta_1 = 105°$. En la sección de salida del rodete la componente acimutal de la velocidad es nula. El agua entra en el rodete sin choque.



El difusor es un tronco de cono recto de eje vertical, de 6 m de longitud, con un diámetro de la sección de entrada $D_{d1} = 45$ cm y un semiángulo de

[1] Aunque, en principio, se podría incluir la pérdida de energía cinética a la salida del difusor dentro de las pérdidas en la turbomáquina, y dado que se trata de un excedente de energía que no es posible aprovechar, resulta más preciso considerarla como una pérdida de energía en la instalación, que se produce aguas abajo de la turbina.

apertura de 8°, cuya sección de salida se encuentra sumergida a una profundidad de 60 cm por debajo de la superficie libre del agua en el canal de descarga. La altura de pérdidas en el interior del difusor es $H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}4\,Q^2$ (Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y $H_{L,\mathrm{d}}$ en m). Se supondrá $\eta_v = 1$. Tómese una presión atmosférica equivalente a 10,33 m de columna de agua. Calcular:

a) Rendimiento hidráulico de la turbina.

b) Potencia útil.

c) Presión absoluta en la sección de entrada al difusor.

Solución

a) $\eta_h = 0{,}815$.

b) $\dot{W}_u = 155{,}0$ kW.

c) 39,57 kPa.

Problema 3.6. Cálculo de magnitudes en la sección de entrada del rodete y de la potencia en el eje

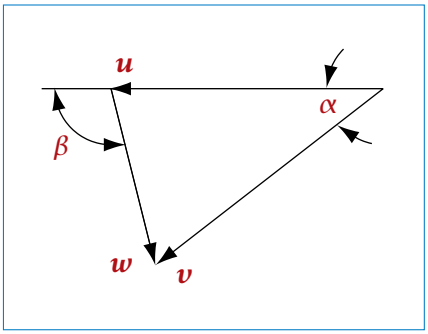
El rodete de una turbina de flujo radial tiene un diámetro exterior $D_1 = 1$ m y un diámetro interior $D_2 = 0{,}75$ m. Las anchuras de los álabes en las secciones de entrada y salida del rodete son, respectivamente, $b_1 = 10$ cm y $b_2 = 27$ cm. El ángulo de salida de los álabes del distribuidor es $\alpha_1 = 10°$, y los ángulos de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida son, respectivamente, $\beta_1 = 100°$ y $\beta_2 = 165°$. Las secciones de paso en la entrada y en la salida del rodete se reducen en un 15 % debido al espesor de los álabes. Los rendimientos orgánico y volumétrico son, respectivamente, $\eta_o = 0{,}97$ y $\eta_v = 0{,}96$. La altura correspondiente a la energía cinética del agua a la salida del rodete es de 3,42 m. Determinar:

a) Componente radial de la velocidad en la sección de entrada del rodete.

b) Potencia en el eje.

Solución

a) Se van a expresar las velocidades en el triángulo de entrada en función de v_{r1}; a continuación se relacionarán las velocidades del triángulo de salida con las del triángulo de entrada, y finalmente se hará uso de la última indicación que se hace en el enunciado.



Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete:

$$\tan(180^\circ - \beta_1) = \frac{v_{r1}}{u_1 - v_{u1}},$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{v_{r1}}{v_{u1}}.$$

De las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_{r1}}{\tan\alpha_1} + \frac{v_{r1}}{\tan(180^\circ - \beta_1)} \\ &= v_{r1}\left[\frac{1}{\tan 10^\circ} + \frac{1}{\tan(180^\circ - 100^\circ)}\right] = 5{,}85\, v_{r1}. \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Por otra parte,

$$u_2 = u_1 \frac{D_2}{D_1} = 0{,}75\, u_1;$$

teniendo en cuenta la ecuación (3.6.1), resulta

$$u_2 = 4{,}39\, v_{r1}. \tag{3.6.2}$$

De la ecuación de conservación de la masa aplicada al rodete se obtiene

$$v_{r2} = v_{r1}\frac{b_1 D_1}{b_2 D_2} = v_{r1}\frac{(0{,}1)(1)}{(0{,}27)(0{,}75)} = 0{,}49\, v_{r1}. \tag{3.6.3}$$

Del triángulo de velocidades a la salida del rodete:

$$v_{u2} = u_2 - \frac{v_{r2}}{\tan(180^\circ - \beta_2)};$$

introduciendo en esta ecuación las expresiones para u_2 y v_{r2} de las ecuaciones (3.6.2) y (3.6.3), resulta

$$v_{u2} = 4{,}39\, v_{r1} - \frac{0{,}49\, v_{r1}}{\tan(180^\circ - 165^\circ)} = 2{,}54\, v_{r1}. \tag{3.6.4}$$

Además,

$$v_2 = \sqrt{v_{r2}^2 + v_{u2}^2};$$

sustituyendo en esta ecuación las ecuaciones (3.6.3) y (3.6.4), se obtiene

$$v_2 = v_{r1}\sqrt{(0{,}49)^2 + (2{,}54)^2} = 2{,}59\, v_{r1}. \tag{3.6.5}$$

Por otra parte, según se indica en el enunciado,

$$\frac{v_2^2}{2g} = 3{,}42 \text{ m},$$

con lo que resulta $v_2 = 8{,}191 \text{ m s}^{-1}$. Introduciendo este resultado en la ecuación (3.6.5), se obtiene

$$\boxed{v_{r1} = 3{,}162 \text{ m s}^{-1}.}$$

b) La potencia en el eje se determina mediante la ecuación (A.3.30). Teniendo en cuenta la ecuación (A.3.26), puede escribirse

$$\dot{W}_t = \eta_v \eta_o \rho Q g H_u. \tag{3.6.6}$$

El salto útil es (ecuación (A.3.44) de Euler)

$$H_u = \frac{u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2}}{g} = \frac{(18{,}49)(17{,}94) - (13{,}87)(8{,}041)}{9{,}81} = 22{,}44 \text{ m},$$

y el caudal,

$$Q = \frac{0{,}85\, v_{r1} \pi D_1 b_1}{\eta_v} = 0{,}8797 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3.6.6), se obtiene

$$\boxed{\dot{W}_t = 180{,}3 \text{ kW}.}$$

Problema 3.7. Determinación de triángulos de velocidades, ángulos de los álabes y altura de pérdidas en el rodete

Una turbina de flujo radial proporciona una potencia útil $\dot{W}_u = 12$ MW funcionando bajo un salto neto $H_n = 114$ m con un caudal $Q = 12\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Los diámetros exterior e interior del rodete son, respectivamente, $D_1 = 1{,}8$ m y $D_2 = 1$ m, y las anchuras de sus álabes en las secciones de entrada y salida, $b_1 = 21$ cm y $b_2 = 45$ cm. El rodete gira a una velocidad $n = 430$ rpm. La velocidad absoluta del agua a la salida del rodete tiene dirección radial. La pérdida de energía en el estator se tomará igual a la energía cinética del agua a la salida del rodete. Se supondrá $\eta_v = 0{,}99$. Determinar:

a) Altura útil y triángulos de velocidades en las secciones de entrada y salida del rodete.

b) Ángulos de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida y ángulo de salida de los álabes del distribuidor.

c) Rendimiento hidráulico, y altura de pérdidas e incremento de presión en el rodete.

d) Tipo de turbina de que se trata.

Solución

a) $H_u = \dot{W}_u/(\rho Q g) = 101{,}9$ m;

$u_1 = \Omega D_1/2 = 40{,}53\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ($\Omega = 2\pi n/60$);

$v_{u1} = g H_u/u_1 = 24{,}68\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;

$v_{m1} = \eta_v Q/(\pi D_1 b_1) = 10{,}00\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;

$u_2 = \Omega D_2/2 = 22{,}51\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;

$v_{u2} = 0$;

$v_{m2} = \eta_v Q/(\pi D_2 b_2) = 8{,}403\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $\beta_1 = 180° - \arctan[v_{m1}/(u_1 - v_{u1})] = 147{,}7°$;

$\beta_2 = 180° - \arctan(v_{m2}/u_2) = 159{,}5°$;

$\alpha_1 = \arctan(v_{m1}/v_{u1}) = 22{,}07°$.

c) $\eta_h = H_u/H_n = 0{,}8942$;

$H_{L,\text{rodete}} = H_n - H_u - v_{m2}^2/(2g) = 8{,}464$ m

[según se indica en el enunciado, $H_{L,\text{estator}} = v_2^2/(2g) = v_{m2}^2/(2g)$];

$\Delta p_{\text{rodete}} = \rho g(H_u + H_{L,\text{rodete}}) - \rho(v_{m1}^2 + v_{u1}^2 - v_{m2}^2)/2 = 763{,}9$ kPa.

d) $\omega_s = \Omega \dfrac{\dot{W}^{1/2}\rho^{3/4}}{(\Delta p_t)^{5/4}} = 430\,\dfrac{2\pi}{60}\,\dfrac{(12\times10^6)^{1/2}(1000)^{3/4}}{[(9{,}81)(1000)(114)]^{5/4}} = 0{,}7627.$

($n_s \approx 193\,\omega_s = 147{,}2$.)

De acuerdo con la Tabla A.3, se trata de una turbina Francis de velocidad intermedia.

Problema 3.8. Determinación de salto neto, rendimientos y geometría de los álabes

El rodete de una turbina radial, de velocidad específica $\omega_s = 0{,}29$, tiene un diámetro exterior $D_1 = 0{,}85$ m, un diámetro interior $D_2 = 0{,}5$ m y gira a una velocidad $n = 660$ rpm. La anchura de los álabes del rodete en la sección de entrada es $b_1 = 6$ cm. La sección de entrada al rodete se reduce en un 4 % debido al espesor de los álabes. La velocidad radial en la sección de salida del rodete es $v_{r2} = 0{,}9v_{r1}$. La altura de pérdidas hidráulicas en la turbina se estima mediante la expresión

$$H_L = 1{,}2\times10^{-4}Q^2 - 0{,}14\,Q + 47$$

(Q en l/s y H_L en m). Se supondrá que los rendimientos orgánico, $\eta_o = 0{,}97$, y volumétrico no dependen del caudal. En el punto de funcionamiento de máximo rendimiento, la componente acimutal de la velocidad absoluta del agua en la sección de salida del rodete es nula y la potencia en el eje de la turbina es $\dot{W}_t = 500$ kW.

Determinar:

a) Salto neto en la turbina.

b) Rendimiento hidráulico máximo de la turbina y caudal en el punto de funcionamiento correspondiente.

c) Rendimiento volumétrico.

d) Anchura de los álabes del rodete en la sección de salida.

e) Ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida.

f) Ángulos de los álabes del rodete en las secciones de entrada y salida.

Solución

a) $H_n = 97{,}65$ m.

b) $\eta_h = 0{,}937$;
$Q = 583{,}3\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ ($\mathrm{d}H_L/\mathrm{d}Q = 0$).

c) $\eta_v = 0{,}985$.

d) $b_2 = 10{,}88$ cm.

e) $\alpha_1 = 6{,}969°$.

f) $\beta_1 = 72{,}50°$;
$\beta_2 = 169{,}0°$.

Problema 3.9. Turbina de doble rodete. Cálculo de condiciones de operación y geometría de rodete y difusor

Una turbina Francis de eje horizontal y doble rodete suministra una potencia nominal a la red eléctrica de 600 kW. Los rodetes son de flujo radial e idénticos entre sí, están dispuestos en paralelo y comparten una voluta que distribuye el caudal en partes iguales entre ambos, estando colocados de forma que los sentidos de salida del agua son opuestos. Los diámetros exterior e interior de los rodetes son $D_1 = 0{,}74$ m y $D_2 = 0{,}48$ m, respectivamente, y sus álabes tienen unas anchuras en las secciones de entrada y salida $b_1 = 8$ cm y $b_2 = 16$ cm, respectivamente. La velocidad específica de cada rodete es $\omega_s = 0{,}55$. A la salida de cada rodete existe un difusor acodado, con una sección de entrada de diámetro $D_{d1} = 45$ cm, y con forma de tronco de cono recto en su parte vertical. Se dispone además de los siguientes datos: ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida, $\alpha_1 = 20°$; ángulo de los álabes del rodete en la sección de entrada, $\beta_1 = 110°$; pérdidas en el difusor, $H_{L,\mathrm{d}} = 0{,}4\,Q^2$ (H en m y Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$, siendo Q el caudal que circula

por cada rodete), y altura del eje del rodete sobre la superficie libre del agua en el canal de descarga, $H = 4$ m. Se supondrá que todos los rendimientos excepto el hidráulico son iguales a la unidad, que la componente acimutal de la velocidad a la salida del rodete es nula y que el agua entra en el rodete sin choque.

Determinar:

a) Caudal que circula por cada rodete, salto neto, velocidad de giro de los rodetes y rendimiento hidráulico de la turbina.

b) Ángulo de salida de los álabes del rodete.

c) Diámetro de la sección de salida de los difusores si la altura correspondiente a la presión manométrica a la salida del rodete es $P_{d1}/(\rho\, g) = -5$ m.

Solución

a) Los rodetes funcionan en paralelo, por lo que cada uno de ellos recibe un caudal $Q = \frac{1}{2}\, Q_{\text{total}}$, dispone de una altura útil $H_u = H_{u,\,\text{total}}$ y genera una potencia $\dot{W} = \frac{1}{2}\, \dot{W}_{\text{total}} = 300$ kW.

Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete, se deduce

$$v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} = 2{,}747\, v_{m1},$$

y

$$u_1 = v_{u1} + \frac{v_{m1}}{\tan\,(180 - \beta 1)} = 3{,}111\, v_{m1}.$$

El caudal y la altura útil están dados por

$$Q = \pi b_1 D_1 v_{m1} = 0{,}186\, v_{m1},$$

$$H_u = v_{u1} u_1 / g = 8{,}546\, v_{m1}^2 / g.$$

Introduciendo estas últimas dos ecuaciones en la siguiente:

$$\dot{W} = \rho g Q H_u,$$

y sustituyendo valores, se obtiene

$$v_{m1} = 5{,}736 \text{ m s}^{-1}.$$

Sustituyendo este valor en ecuaciones anteriores, resulta

$$\boxed{Q = 1{,}067 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},}$$

$$H_u = 28{,}67 \text{ m},$$
$$u_1 = 17{,}85 \text{ m s}^{-1}.$$

A partir de este último valor, se obtiene

$$\boxed{\Omega = u_1/(D_1/2) = 48{,}23 \text{ rad s}^{-1}.}$$

De la expresión (A.3.69) para la velocidad específica,

$$\omega_s = \frac{\Omega \dot{W}^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH_n)^{5/4}},$$

se deduce

$$\boxed{H_n = 35{,}77 \text{ m}.}$$

Finalmente, el rendimiento hidráulico es

$$\boxed{\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = 0{,}801.}$$

b) Del triángulo de velocidades a la salida del rodete, se deduce

$$\tan(180 - \beta_2) = \frac{v_{m_2}}{u_2} = \frac{\dfrac{Q}{\pi b_2 D_2}}{\Omega \dfrac{D_2}{2}},$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\beta_2 = 159{,}1°.}$$

c) De la ecuación de conservación de la energía mecánica aplicada entre la sección de entrada al difusor y la superficie libre del agua en el canal de descarga,

$$\frac{p_{d1}}{\rho g} + \frac{v_{d1}^2}{2g} + 4 = \frac{v_{d_2}^2}{2g} + H_{L_d}, \tag{3.9.1}$$

donde

$$v_{d1} = \frac{Q}{\pi D_{d1}^2/4} = 6{,}707 \text{ m s}^{-1}$$

es la velocidad a la entrada del difusor, $H_{L_d} = 0{,}4551$ m es la pérdida de carga en el difusor y $v_{d_2}^2/(2g)$ es la pérdida de energía cinética del chorro de salida, se obtiene $v_{d_2} = 4{,}054 \text{ m s}^{-1}$ y, a partir de este valor,

$$\boxed{D_{d_2} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_{d2}}} = 0{,}5788 \text{ m}.}$$

Problema 3.10. Determinación del ángulo del distribuidor y la velocidad de giro bajo distintas condiciones de funcionamiento

Se dispone de los siguientes datos geométricos del rodete de una turbina hidráulica de flujo radial: $D_1 = 1{,}2$ m, $D_2 = 0{,}7$ m, $b_1 = 15$ cm, $b_2 = 35$ cm, $\beta_1 = 110°$ y $\beta_2 = 150°$. Se tomarán los siguientes rendimientos volumétrico, orgánico y del generador eléctrico: $\eta_v = 1$, $\eta_o = 0{,}96$ y $\eta_e = 0{,}92$. En todas las situaciones que se describen a continuación se considerará que el agua entra en el rodete sin choque y que los álabes guían perfectamente el flujo.

a) Determinar el ángulo de salida de los álabes del distribuidor, α_1, necesario para que el agua salga del rodete con dirección radial.

b) Determinar la velocidad de giro del rodete y la potencia que suministrará el generador eléctrico si la velocidad absoluta del agua en la sección de salida del rodete es $v_2 = 8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ cuando el ángulo de salida de los álabes del distribuidor es $\alpha_1 = 15°$. Obsérvese que la velocidad $\boldsymbol{v}_2$ no tiene en este caso dirección radial.

c) Suponiendo que la turbina gira a la velocidad calculada en el apartado b), determinar el caudal para el que se consiguen las condiciones del apartado a) y la altura útil correspondiente.

Solución

a) De los triángulos de velocidades a la salida y a la entrada del rodete se obtiene

$$\tan(\beta_2 - 90°) = \frac{u_2}{v_{r2}} = \frac{\Omega D_2/2}{Q/(\pi D_2 b_2)}, \tag{3.10.1}$$

$$\begin{aligned}\tan(180° - \beta_1) = \frac{v_{r1}}{u_1 - v_{u1}} &= \frac{v_{r1}}{u_1 - v_{r1}/\tan\alpha_1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\Omega D_1/2}{Q/(\pi D_1 b_1)} - 1/\tan\alpha_1}.\end{aligned} \tag{3.10.2}$$

De la ecuación (3.10.1), se obtiene

$$\frac{\pi\Omega}{2\,Q} = \frac{\tan(\beta_2 - 90°)}{D_2^2 b_2}. \tag{3.10.3}$$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación (3.10.2) y despejando en esta, resulta

$$\boxed{\alpha_1 = 28{,}82^\circ.}$$

b) En este caso, del triángulo de velocidades a la salida del rodete se obtiene

$$\begin{aligned}\tan(\beta_2 - 90^\circ) &= \frac{u_2 - v_{u2}}{v_{r2}} = \frac{u_2 - (v_2^2 - v_{r2}^2)^{0,5}}{v_{r2}} \\ &= \frac{\pi\Omega}{2Q} D_2^2 b_2 - \left(\frac{(8)^2(\pi D_2 b_2)^2}{Q^2} - 1\right)^{0,5}.\end{aligned} \tag{3.10.4}$$

Despejando $\pi\Omega/(2Q)$ de la ecuación (3.10.2) e introduciendo la expresión resultante en el primer sumando del último miembro de la ecuación (3.10.4), se obtiene una ecuación de donde resulta, sustituyendo valores, $Q = 3{,}384\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. De la ecuación (3.10.3), resulta

$$\boxed{\Omega = 40{,}85\ \mathrm{rad\,s^{-1}}.}$$

A partir de los resultados anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}u_1 &= \Omega D_1/2 = 24{,}51\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ u_2 &= \Omega D_2/2 = 14{,}30\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ v_{r1} &= Q/(\pi D_1 b_1) = 5{,}984\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ v_{r2} &= Q/(\pi D_2 b_2) = 4{,}397\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ v_{u1} &= v_{r1}/\tan 15^\circ = 22{,}33\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ v_{u2} &= (v_2^2 - v_{r2}^2)^{0,5} = 6{,}683\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\ H_u &= (u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2})/g = 46{,}06\ \mathrm{m},\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\boxed{\dot{W}_e = \eta_e \eta_o \eta_v g \rho Q H_u = 1351\ \mathrm{kW}.}$$

c) Sustituyendo el valor de Ω obtenido en el apartado anterior en la ecuación (3.10.3), se obtiene

$$\boxed{Q = 6{,}354\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

La correspondiente altura útil es

$$\begin{aligned}H_u = \frac{u_1 v_{u1}}{g} &= \frac{1}{g} u_1 \frac{v_{r1}}{\tan\alpha_1} = \frac{1}{g}\frac{\Omega D_1}{2}\frac{Q}{\pi b_1 D_1 \tan\alpha_1} \\ &= \frac{\Omega Q}{2\pi b_1 g \tan\alpha_1} = \frac{(40{,}85)(6{,}354)}{2\pi(0{,}15)(9{,}81)\tan 28{,}82^\circ},\end{aligned}$$

de donde resulta

$$\boxed{H_u = 51{,}03\ \mathrm{m}.}$$

Problema 3.11. Determinación de diversas magnitudes de funcionamiento en una turbina con difusor de forma tronco-cónica (II)

Se quiere aprovechar un salto hidráulico en el que se dispone de un caudal $Q = 10\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ y un salto bruto $H_b = 48$ m. Para ello se va a utilizar una turbina hidráulica con un rodete de flujo radial, con un diámetro de 160 cm y un ángulo de los álabes en la sección de entrada $\beta_1 = 100°$, y un distribuidor formado por una corona de álabes fijos, cuyo ángulo de salida es $\alpha_1 = 20°$. El agua debe entrar sin choque en el rodete y salir de él con velocidad sin componente acimutal. Se utilizará un difusor con forma de tronco de cono de diámetros de entrada y salida $D_{d1} = 1{,}25$ m y $D_{d2} = 2$ m, respectivamente, estando su sección de entrada, en la que existe una presión manométrica $p_{\mathrm{d1}} = -60$ kPa, situada a una altura de 4,5 m por encima de la superficie libre del agua en el canal de descarga. Se ha realizado una estimación de las pérdidas de carga en la conducción de agua hasta la turbina, $H_\varphi = 0{,}06\,H_b$, de las pérdidas en el conjunto voluta-distribuidor de la turbina, $H_{L,\mathrm{v-d}} = 0{,}03\,H_b$, y de los rendimientos hidráulico, orgánico y volumétrico, $\eta_h = 0{,}9$, $\eta_o = 0{,}97$ y $\eta_v = 0{,}99$. Se supondrá que las fugas de caudal son externas (el caudal fugado no circula por el rodete ni por el difusor). Determinar:

a) Salto neto y potencia suministrada por la turbina.

b) Altura de pérdidas de carga en el difusor y en el rodete.

c) Velocidad de giro del rodete.

d) Velocidad específica de la turbina. Indíquese de qué tipo de turbina se trata y si se observa algún posible inconveniente en el diseño general.

Solución

a) $v_{d2} = 4\,Q\eta_v/(\pi D_{d2}^2) = 3{,}151\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$H_n = H_b - H_\varphi - v_{d2}^2/(2g) = 44{,}61$ m;
$\dot{W}_t = 3{,}783$ MW.

b) $v_{d1} = 4\,Q\eta_v/(\pi D_{d1}^2) = 8{,}067\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$H_L = (1-\eta_h)H_n = 4{,}461$ m;

$H_{L,\mathrm{d}} = 1{,}195$ m

[este resultado se obtiene de la ecuación siguiente:

$$v_{d1}^2/(2g) + 4{,}5 + p_{d1}/(\rho g) = v_{d2}^2/(2g) + H_{L,\mathrm{d}}\Big];$$

$H_{L,\mathrm{r}} = H_L - H_{L,\mathrm{v-d}} - H_{L,\mathrm{d}} = 1{,}827$ m.

c) Del triángulo de velocidades en la sección de entrada al rodete, se deduce

$$u_1 = v_{u1} + v_{u1}\frac{\tan\alpha_1}{\tan(180^\circ - \beta_1)},$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$H_u = v_{u1}u_1/g = H_n/\eta_h,$$

resulta

$$u_1 = 20{,}47\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La velocidad de giro del rodete debe ser, por tanto,

$$\boxed{n = \frac{60u_1}{\pi D} = 244{,}4\ \mathrm{rpm}.}$$

d) $\omega_s = 0{,}7863$. Turbina francis normal.

Problema 3.12. Regulación de una turbina de flujo radial

Bajo ciertas condiciones una turbina Francis de flujo radial funciona con un salto neto $H_n = 50$ m y un caudal $Q = 10\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$, girando a una velocidad $n = 270$ rpm. Los diámetros correspondientes a las secciones de entrada y salida del rodete son, respectivamente, $D_1 = 1{,}5$ m y $D_2 = 0{,}8$ m. La anchura de los álabes a la entrada del rodete es $b_1 = 0{,}3$ m. El ángulo de los álabes a la entrada del rodete es $\beta_1 = 100^\circ$. El agua sale del rodete con una velocidad absoluta $v_2 = 8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, sin componente acimutal. El rendimiento volumétrico es $\eta_v = 0{,}98$. Determinar:

a) Altura útil y rendimiento hidráulico.

b) Ángulos de salida de los álabes del distribuidor y del rodete.

Considérese a continuación que para reducir el caudal se giran los álabes del distribuidor de forma que a la salida del distribuidor se reduce en 1° el

ángulo de los álabes y el módulo de la velocidad se mantiene constante. Suponiendo que el rendimiento volumétrico no varía, determinar:

c) El caudal y el rendimiento hidráulico en las nuevas condiciones (téngase en cuenta que en este caso v_{u2} no tiene por qué ser nula).

d) Representar gráficamente cómo varían los triángulos de velocidades a la entrada y salida del rodete al girar los álabes del distribuidor.

Solución

a) La velocidad de arrastre en la sección de entrada al rodete es

$$u_1 = n\frac{\pi}{60}D_1 = 21{,}21 \text{ m s}^{-1}.$$

Del triángulo de velocidades en dicha sección se obtiene

$$v_{m1} = \frac{Q\eta_v}{\pi b_1 D_1} = 6{,}392 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_{u1} = u_1 - \frac{v_{m1}}{\tan(180° - \beta_1)} = 19{,}98 \text{ m s}^{-1}.$$

A partir de estos valores se calcula

$$\boxed{H_u = v_{u1}u_1/g = 43{,}20 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{\eta_h = H_u/H_n = 0{,}864.}$$

b) Del triángulo de velocidades en la sección de salida del distribuidor, se obtiene

$$\boxed{\alpha_1 = \arctan(v_{m1}/v_{u1}) = 19{,}13°,}$$

y del de salida, teniendo en cuenta que $v_{m2} = v_2 = 8 \text{ m s}^{-1}$ y $u_2 = nD_2\pi/60 = 11{,}31 \text{ m s}^{-1}$, resulta

$$\boxed{\beta_2 = 180° - \arctan\left(\frac{v_{m2}}{u_2}\right) = 144{,}7°.}$$

c) En las nuevas condiciones de funcionamiento,

$$\alpha_1' = 19{,}13° - 1° = 18{,}13°$$

y

$$v_1' = v_1 = (v_{m1}^2 + v_{u1}^2)^{1/2} = 21{,}15 \text{ m s}^{-1}.$$

Las componentes de la velocidad absoluta a la entrada del rodete son

$$v'_{m1} = v'_1 \operatorname{sen} \alpha'_1 = 6{,}582 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$v'_{u1} = v'_1 \cos \alpha'_1 = 20{,}10 \text{ m s}^{-1},$$

y a la salida,

$$v'_{m2} = v_{m2} v'_{m1} / v_{m1} = 7{,}596 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$v'_{u2} = u_2 - v'_{m2} / \tan(180° - \beta_2) = 0{,}571 \text{ m s}^{-1}.$$

Nótese que, debido al efecto de guiado de los álabes del rodete, no varía la dirección de la velocidad relativa a la salida de estos; es decir, $\beta'_2 = \beta_2$.

El caudal y el rendimiento hidráulico en la nueva situación son

$$\boxed{Q' = Q v'_{m1} / v_{m1} = 9{,}495 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}}$$

y

$$\boxed{\eta'_h = H'_u / H_n = (v'_{u1} u_1 - v'_{u2} u_2)/(g H_n) = 0{,}856,}$$

respectivamente.

d) Las siguientes son representaciones gráficas cualitativas de los triángulos de velocidades indicados en el enunciado:

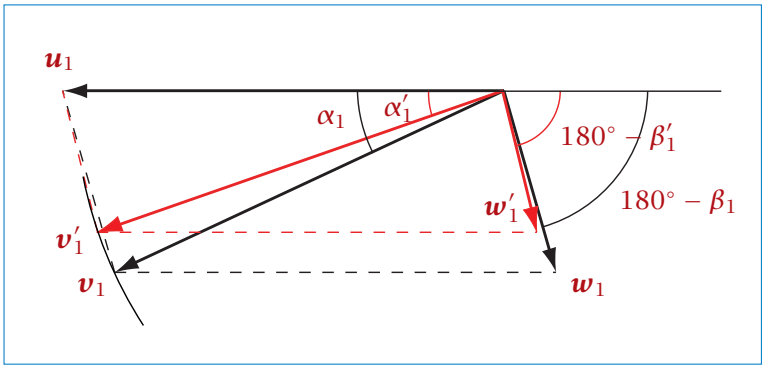


Figura 3.12.1
Triángulo de velocidades a la entrada del rodete (la figura no está hecha a escala).

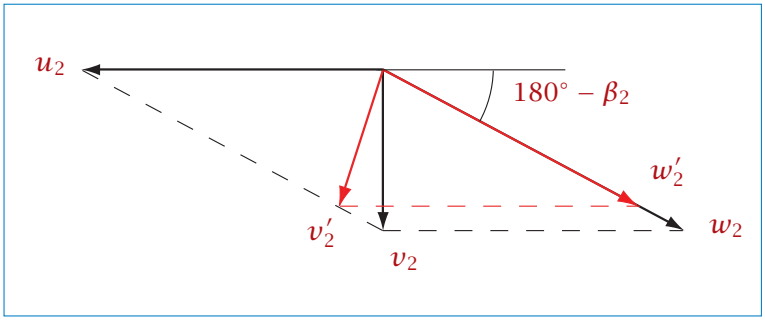


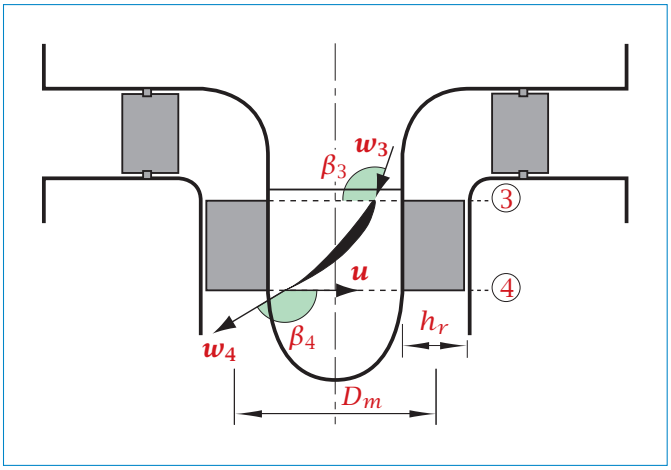
Figura 3.12.2
Triángulo de velocidades a la salida del rodete.

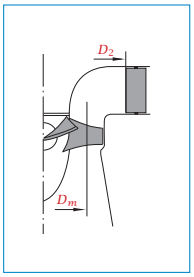
Capítulo 4

Turbinas Kaplan

Problema 4.1. Cálculo de diversas magnitudes en el rodete y el distribuidor

Los álabes del distribuidor de una turbina Kaplan están contenidos en un anillo cilíndrico de diámetros exterior e interior $D_1 = 10$ m y $D_2 = 7{,}6$ m, respectivamente, y altura $h_d = 2{,}8$ m. Los álabes del rodete tienen una longitud desde la raíz hasta la punta $h_r = 2{,}2$ m y un radio medio $D_m/2 = 2{,}3$ m (véase la figura adjunta).[1] El agua entra en el distribuidor radialmente (sección 1) y sale de él (sección 2) desviada un cierto ángulo α_2, que se supondrá que coincide con el ángulo de salida de los álabes.[2] Se supondrá que el flujo en la cascada correspondiente a la superficie cilíndrica de diámetro D_m es representativo del flujo en el rodete (se supondrá que la circulación se mantiene constante a lo largo de los álabes del rodete, de forma que la altura útil del rodete se tomará igual a la altura útil de dicha cascada). En esta cascada, el agua entra en el rodete de forma que la velocidad relativa forma un ángulo $\beta_3 = 130°$, y sale del rodete con una velocidad absoluta $v_4 = 7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, sin componente acimutal ($v_{u4} = 0$), y con una velocidad relativa que forma un ángulo $\beta_4 = 160°$. Se supondrá que la componente axial de la velocidad es uniforme en las secciones de entrada (3) y salida (4) del rodete, y que las fugas de caudal son despreciables.





Determinar:

a) Caudal y velocidad de giro del rodete.

b) Rendimiento hidráulico, teniendo en cuenta que el salto neto es $H_n = 30$ m.

c) Componente acimutal de la velocidad a la salida del distribuidor, v_{u2}, suponiendo que el momento angular de una partícula fluida en la sección de entrada al rodete es el mismo que tenía al salir del distribuidor.

d) Ángulo de salida de los álabes del distribuidor, α_2.

e) Velocidad v_1 en la sección de entrada al distribuidor.

Solución

a) Al ser nula la componente acimutal de la velocidad a la salida del rodete, resulta $v_{m4} = v_4 = 7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, con lo que se obtiene un caudal

$$\boxed{Q = (1/\eta_v) v_{m4} \pi D_m h_r = 222{,}5\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

[2] Esta hipótesis se adoptará también, cuando proceda, en los restantes problemas de este capítulo.

[2] En la figura de la izquierda solo se representa, del álabe frontal del rodete, la sección correspondiente a la posición radial considerada. La forma de los álabes se representa con más detalle en la figura de la derecha para una turbina de características geométricas similares.

Del triángulo de velocidad a la salida del rodete, se deduce

$$u_4 = v_{m4} \tan(\beta_4 - 90°) = 19{,}23 \text{ m s}^{-1}.$$

La velocidad de giro

$$\boxed{\Omega = \frac{u_4}{D_m/2} = 8{,}37 \text{ rad s}^{-1}.}$$

b) Al ser el área y D_m iguales en las secciones 3 y 4, $v_{m3} = v_{m4}$ y $u_3 = u_4$. Del triángulo de velocidades a la entrada del rodete se deduce

$$v_{u3} = u_3 - v_{m3} \tan(\beta_3 - 90°) = 13{,}36 \text{ m s}^{-1},$$

y al ser $v_{u4} = 0$, resulta una altura útil

$$H_u = \frac{v_{u3} u_3}{g} = 26{,}21 \text{ m s}^{-1}.$$

Finalmente, el rendimiento hidráulico

$$\boxed{\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = 0{,}87.}$$

c) Aplicando la condición indicada en el enunciado sobre la conservación del momento angular de una partícula fluida entre las secciones 2 y 3, teniendo en cuenta que el momento angular en la sección 2 de salida del distribuidor es uniforme, puede escribirse

$$D_2 v_{u2} = D_m v_{u3},$$

de donde resulta

$$\boxed{v_{u2} = \frac{D_m v_{u3}}{D_2} = 8{,}09 \text{ m s}^{-1}.}$$

d) La componente radial de la velocidad a la salida del distribuidor viene dada por

$$v_{r2} = \frac{Q}{\pi D_2 h_d} = 3{,}33 \text{ m s}^{-1}.$$

Del triángulo de velocidades a la salida del distribuidor, se obtiene

$$\boxed{\alpha_2 = \arctan\left(\frac{v_{r2}}{v_{u2}}\right) = 22{,}4°.}$$

e) Teniendo en cuenta que el agua entra radialmente en el distribuidor,

$$\boxed{v_1 = \frac{Q}{\pi D_1 h_d} = 2{,}53 \text{ m s}^{-1}.}$$

Problema 4.2. Rendimientos, triángulo de velocidades y presión en el difusor

Una turbina Kaplan de eje vertical, con un rodete de diámetro exterior $D_{\text{ext}} = 8$ m y diámetro interior $D_{\text{int}} = 3{,}2$ m, funciona con un salto neto $H_n = 11$ m y un caudal $Q = 500\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, girando a una velocidad $n = 65{,}2$ rpm. La potencia eléctrica generada por el alternador es de 45 MW. El rendimiento del alternador es $\eta_e = 0{,}96$ y el rendimiento orgánico de la turbina es $\eta_o = 0{,}97$. La velocidad absoluta a la salida del rodete no tiene componente acimutal. Los álabes se han diseñado de forma que a lo largo de ellos la circulación se mantiene constante. La componente axial de la velocidad es uniforme en todo el rodete.

El tubo difusor tiene una relación de áreas de 1,5:1, y su sección de entrada está situada a una altura de 2 m por encima del nivel de agua en el canal de descarga. La pérdida de energía en el interior del difusor se estima en un 10 % de la energía cinética en su sección de entrada. Se supondrá una presión de saturación de vapor $p_v = 2500\ \text{N}\,\text{m}^{-2}$. Determinar:

a) Rendimiento total de la turbina.

b) Rendimiento hidráulico (se supondrá $\eta_v = 1$).

c) Triángulos de velocidades de entrada y salida en las secciones correspondientes al extremo y a la raíz de los álabes.

d) Presión absoluta en la sección de entrada del difusor. Comentar la posibilidad de que la turbina funcione en condiciones de cavitación.

Solución

a) 0,869.

b) 0,896.

c) Raíz: $u = 10{,}92\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_m = 11{,}84\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$; $\beta_1 = 99{,}95°$; $\beta_2 = 132{,}7°$.
Punta: $u = 27{,}31\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_m = 11{,}84\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$; $\beta_1 = 153{,}5°$; $\beta_2 = 156{,}6°$.

d) 55,94 kPa.

Problema 4.3. Regulación de una turbina Kaplan (I)

Bajo ciertas condiciones de funcionamiento de una turbina Kaplan (véase la figura del Problema 4.1 en la página 112), el triángulo de velocidades correspondiente a una cierta posición radial en la sección de entrada al rodete está determinado por las siguientes magnitudes: $u = 30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_3 = 13\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\alpha_3 = 14°$, y el ángulo de salida de los álabes del distribuidor es $\alpha_2 = 20°$.[3] Se supondrá que la dirección de la velocidad relativa en la sección de salida del rodete coincide en cualquier condición de funcionamiento con la dirección de sustentación nula de los álabes (lo que se correspondería con una situación en la que el número de álabes fuese elevado).

Determinar:

a) Triángulo de velocidades en la sección de salida del rodete, correspondiente a la misma posición radial considerada, suponiendo que existe una pérdida de altura $v_{u4}^2/(2g) = 0{,}25$ m debida a la existencia de una componente acimutal de la velocidad absoluta a la salida.

Supóngase a continuación que los álabes del distribuidor giran 1° en el sentido de giro del rodete, y que los álabes del rodete giran un ángulo $\Delta\beta$, de forma que se mantiene constante el módulo de la velocidad absoluta de salida del distribuidor y el ángulo de ataque sobre los álabes del rodete.

Determinar, en las nuevas condiciones de funcionamiento:

b) Variación porcentual del caudal.

c) Ángulo que giran los álabes del rodete.

d) Triángulo de velocidades en la sección de salida del rodete.

Solución

a) En el triángulo de velocidades a la salida del rodete,

$$v_{u4} = \sqrt{2g(0{,}25)},$$

$$v_{m4} = v_{m3} = v_3 \operatorname{sen} \alpha_3,$$

[3] Véanse las figuras del enunciado del Problema 4.1.

$$\alpha_4 = \arctan \frac{v_{m4}}{v_{u4}},$$

$$\beta_4 = 180^\circ - \arctan \frac{v_{m4}}{u - v_{u4}}.$$

Sustituyendo valores y operando, resulta

$$\boxed{v_{u4} = 2{,}215 \text{ m s}^{-1},\ v_{m4} = 3{,}145 \text{ m s}^{-1},\ \alpha_4 = 54{,}85^\circ,\ \beta_4 = 173{,}5^\circ.}$$

b) En la figura siguiente se representan los cambios de condiciones indicados en el enunciado:[4]

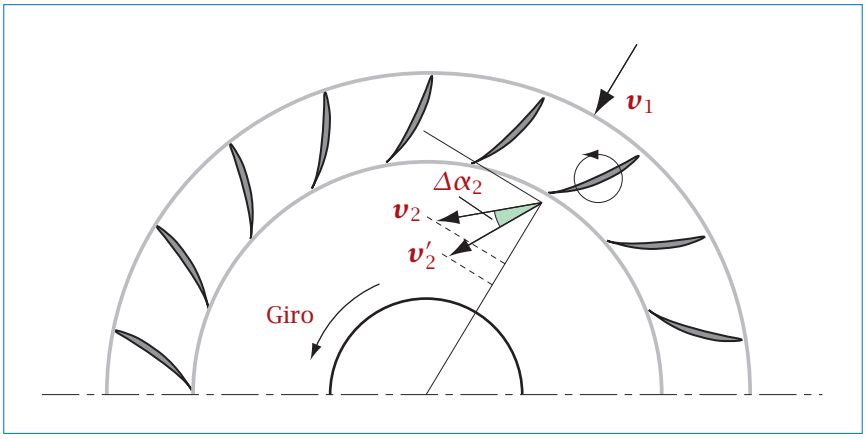


Figura 4.3.1
Sección del distribuidor.

Comparando los triángulos de velocidades a la salida del distribuidor antes y después de que giren sus álabes (símbolos con prima en el segundo caso), se obtiene

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{v'_{m2}}{v_{m2}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \Delta\alpha_2)}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{\operatorname{sen}(20^\circ + 1^\circ)}{\operatorname{sen} 20^\circ} = 1{,}048.$$

[4] De la figura del Problema 4.1, a la que se hace referencia en el enunciado, se deduce que el rodete, en una vista desde arriba, gira en sentido antihorario. Teniendo en cuenta que la componente acimutal de la velocidad absoluta a la entrada del rodete, v_{u3}, tiene el mismo signo que u, el sentido de giro del rodete requiere que los álabes del distribuidor estén dispuestos con un ángulo como el mostrado en la Figura 4.3.1. De lo anterior se deduce que el giro de los álabes del distribuidor ($\Delta\alpha_2 = 1^\circ$) en el sentido de giro del rodete producirá, si se mantiene constante el módulo de la velocidad absoluta a la salida del distribuidor, un aumento de la componente meridiana, v_{m2}, y, por tanto, un aumento del caudal.

El caudal aumenta, por tanto, en un

$$\boxed{\frac{Q' - Q}{Q} \times 100 = 4{,}8\,\%.}$$

c) La nueva componente meridiana de la velocidad a la entrada del rodete es

$$v'_{m3} = \frac{Q'}{Q}\, v_{m3} = \frac{Q'}{Q}\, v_3 \operatorname{sen} \alpha_3 = 3{,}295 \text{ m s}^{-1},$$

y la acimutal, suponiendo que se conserva el momento cinético entre las secciones de salida del distribuidor y entrada del rodete ($r v_u$ = constante),

$$v'_{u3} = \frac{v'_{u2}}{v_{u2}}\, v_{u3} = \frac{\cos(\alpha_2 + 1^\circ)}{\cos \alpha_2}\, v_3 \cos \alpha_3 = 12{,}53 \text{ m s}^{-1}.$$

A partir de estos valores, se obtiene

$$\beta'_3 = 180^\circ - \arctan \frac{v'_{m3}}{u - v'_{u3}} = 169{,}3^\circ.$$

De forma análoga a como se ha obtenido β'_3, se obtiene

$$\beta_3 = 180^\circ - \arctan \frac{v_{m3}}{u - v_3 \cos \alpha_3} = 169{,}7^\circ.$$

El ángulo girado por los álabes del rodete es, por tanto,

$$\boxed{\Delta\beta = \beta'_3 - \beta_3 = -0{,}4^\circ.}$$

d) El nuevo ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta'_4 = \beta_4 + \Delta\beta$, y las componentes de la velocidad,

$$v'_{m4} = v'_{m3}$$

y

$$v'_{u4} = u - \frac{v'_{m4}}{\tan(180^\circ - \beta'_4)}.$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{v'_{m4} = 3{,}295 \text{ m s}^{-1},}$$

$$\boxed{\beta'_4 = 173{,}1^\circ,}$$

$$\boxed{v'_{u4} = 2{,}719 \text{ m s}^{-1}.}$$

Problema 4.4. Rangos de condiciones de funcionamiento de una turbina

Una turbina hidráulica tiene un rendimiento total mínimo garantizado del 75 % para el rango de potencias comprendido entre 150 y 270 kW, trabajando bajo un salto de 3 m y girando a 250 rpm. Se supondrá un rendimiento orgánico $\eta_o = 0{,}96$ y un rendimiento volumétrico $\eta_v = 1$. El área de la sección transversal de salida del difusor, de 9200 cm^2, se supondrá igual a la de la sección de salida del rodete. Ésta se halla situada a 1,5 m por encima del nivel del agua en el socaz. El ángulo de salida de los álabes del distribuidor, que se supondrán fijos, es de 80°. En el tubo difusor se produce una pérdida de carga igual a $0{,}6\, v_{m2}^2/(2g)$. El diámetro medio del rodete es de 1,04 m.

a) Indicar el tipo de turbina de que se trata.

b) Determinar si será posible obtener una potencia de 400 kW, manteniendo el mismo rendimiento indicado, si el salto neto es de 4,5 m.

c) Si se consigue elevar el salto disponible hasta 5 m, determinar las potencias mínima y máxima que podrán alcanzarse.

d) Determinar el número de pares de polos que debe tener un alternador síncrono acoplado a la turbina para las condiciones del apartado c).

e) Determinar si existe peligro de cavitación en el rango de condiciones de funcionamiento del apartado c).

Se supondrá en lo que sigue que el ángulo que forma la velocidad absoluta del agua en la sección de entrada al rodete con la dirección tangencial coincide con el ángulo de salida de los álabes del distribuidor.

f) Determinar, para la sección correspondiente al diámetro medio del rodete, los triángulos de velocidades en las dos condiciones extremas de funcionamiento del apartado c).

g) Para el rango de condiciones del apartado c), determinar el rendimiento óptimo si este se alcanza para un caudal igual a la media de los caudales máximo y mínimo. Se supondrá que $v_{u2} = 0$ en el punto de funcionamiento con rendimiento óptimo.

Solución

a) Kaplan muy rápida de álabes móviles. [Utilícese la Tabla A.3.]

b) Sí (justifíquese).

c) 322,7 kW; 580,9 kW.

d) 9.

e) No (justifíquese).

f) $u = 17{,}58\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
$v_{m,\mathrm{mín}} = 9{,}536\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_{u1,\mathrm{mín}} = 1{,}681\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_{u2,\mathrm{mín}} = -0{,}4989\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.
$v_{m,\mathrm{máx}} = 17{,}17\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_{u1,\mathrm{máx}} = 3{,}027\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_{u2,\mathrm{máx}} = 0{,}8463\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

g) 80,98 %.

Problema 4.5. Regulación de una turbina Kaplan (II)

Una turbina Kaplan dispone de un sistema de doble regulación que actúa simultáneamente sobre los álabes del distribuidor y del rodete, permitiendo variar la potencia que produce la turbina en función de la demanda. Girando los álabes del distribuidor se reduce o aumenta el caudal (manteniéndose constante el módulo de la velocidad absoluta de entrada al rodete), y girando los álabes del rodete se consigue mantener constante el ángulo de ataque sobre estos. La turbina trabaja con un salto neto $H_n = 50$ m y una velocidad de giro $n = 250$ rpm, ambos constantes, y en condiciones nominales produce una potencia de 40 MW con un caudal $Q = 90\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. En estas condiciones, el ángulo de los álabes del rodete en la sección de salida es $\beta_2 = 150°$, y el agua sale de este sin componente acimutal. Se supondrá que en la sección de salida del rodete la velocidad relativa es tangente a los álabes. El diámetro interior de la corona de álabes móviles del distribuidor es $D_0 = 3{,}3$ m y la longitud axial de estos es $b_0 = 1{,}25$ m. El rodete tiene un diámetro medio $D_m = 2{,}4$ m, y sus álabes se han diseñado de forma que a lo largo de ellos la circulación se mantiene constante. Se considerará que los rendimientos volumétrico y orgánico son iguales a la unidad.

Determinar, en condiciones nominales:

a) El triángulo de velocidades a la entrada del rodete en la sección co-

rrespondiente al diámetro medio.

b) El ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida.

Se supondrá a continuación que se reduce el caudal en un 10 % para adaptarse a una reducción de la demanda de potencia, para lo que se giran los álabes del distribuidor y del rodete.

Determinar:

c) Los ángulos que deben girar los álabes del rodete y del distribuidor.

d) La altura útil y la potencia en el eje en las nuevas condiciones de operación.

Se supondrá ahora que, funcionando en condiciones nominales, la demanda de potencia se reduce en un 10 %.

c) Determinar la reducción de caudal necesaria para adaptarse a la nueva demanda.

Solución

a) En condiciones nominales,

$$H_u = \frac{\dot{W}_t}{\eta_v \eta_o \rho g Q} = 45{,}31 \text{ m}. \tag{4.5.1}$$

En el triángulo de velocidades a la salida del rodete,

$$u = nD_m\pi/60 = 31{,}42 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_{m2} = u \tan(180^\circ - \beta_2) = 18{,}14 \text{ m s}^{-1}.$$

Y en el triángulo de velocidades a la entrada del rodete,

$$\begin{aligned} v_{m1} &= v_{m2}, \\ v_{u1} &= \frac{H_u g}{u}, \\ \beta_1 &= 180^\circ - \arctan\left(\frac{v_{m1}}{u - v_{u1}}\right). \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{v_{m1} = 18{,}14 \text{ m s}^{-1},}$$

$$\boxed{v_{u1} = 14{,}15 \text{ m s}^{-1},}$$

$$\boxed{\beta_1 = 133{,}6^\circ.}$$

b) Suponiendo que se conserva el momento cinético entre las secciones de salida del distribuidor y entrada al rodete, se cumple

$$v_{u1} D_m = v_{u0} D_0,$$

de donde se obtiene $v_{u0} = 10{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, componente acimutal de la velocidad en la sección de salida del distribuidor. La componente meridiana en esta sección es

$$v_{m0} = \frac{Q}{\pi b_0 D_0} = 6{,}945\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

A partir de las componentes de la velocidad, se obtiene

$$\boxed{\alpha_0 = \arctan\left(v_{m0}/v_{u0}\right) = 34{,}02^\circ.}$$

c) Al disminuir el caudal, el módulo de la velocidad absoluta del agua en la sección de salida del distribuidor,

$$v_0 = \sqrt{v_{m0}^2 + v_{u0}^2} = 12{,}41\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

no varía, dado que depende del salto, pero sí sus componentes,

$$v'_{m0} = 0{,}9\, v_{m0} = 6{,}250\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$v'_{u0} = \sqrt{v_0^2 - v'^2_{m0}} = 10{,}72\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

El nuevo ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida (suponiendo que existe un perfecto guiado del agua) es

$$\alpha'_0 = \arctan\left(\frac{v'_{m0}}{v'_{u0}}\right) = 30{,}23^\circ,$$

y el ángulo girado,

$$\boxed{\Delta\alpha_0 = \alpha'_0 - \alpha_0 = -3{,}786^\circ.}$$

Teniendo en cuenta que los álabes del rodete giran de tal forma que se mantiene el ángulo de ataque, el nuevo ángulo de la velocidad relativa en la sección de entrada al rodete es

$$\beta'_1 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{v'_{m1}}{u - v'_{u1}}\right) = 135{,}6^\circ,$$

siendo

$$v'_{u1} = v'_{u0} D_0/D_m = 14{,}75\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

y

$$v'_{m1} = 0{,}9\, v_{m1} = 16{,}32\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

El ángulo girado por los álabes del rodete resulta, por tanto,

$$\boxed{\Delta\beta_1 = \beta'_1 - \beta_1 = 2{,}005^\circ.}$$

d) A partir del ángulo girado por los álabes del rodete, se obtiene el ángulo de estos en la sección de salida,

$$\beta_2' = \beta_2 + \Delta\beta_1 = 152{,}0°,$$

y, a partir de este valor,

$$v_{u2}' = u - \frac{v_{m2}'}{\tan(180° - \beta_2')} = 0{,}708 \text{ m s}^{-1}.$$

La nueva altura útil es

$$\boxed{H_u' = \frac{u(v_{u1}' - v_{u2}')}{g} = 44{,}96 \text{ m},}$$

y la potencia generada,

$$\boxed{\dot{W}_t' = \eta_v \eta_o \rho g Q' H_u' = 35{,}7 \text{ MW}.}$$

e) Para adecuarse a la nueva potencia demandada, $\dot{W}_t''$, el caudal, Q'', y la altura útil, H_u'', deben satisfacer

$$\dot{W}_t'' = \eta_v \eta_o \rho g H_u'' Q'' = 0{,}9\, \dot{W}_t,$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$H_u'' = u(v_{u1}'' - v_{u2}'')/g$$

y las ecuaciones (4.5.1) y (4.5.2), resulta

$$0{,}9\, v_{u1} = a(v_{u1}'' - v_{u2}''), \tag{4.5.3}$$

donde $a = Q''/Q$. Demuéstrese que, a partir de los triángulos de velocidades en la secciones de salida del distribuidor y de entrada y salida del rodete correspondientes al diámetro medio, se obtienen las siguientes expresiones:

$$v_{u1}'' = \frac{D_0}{D_m} v_{u0}'' = \frac{D_0}{D_m} \sqrt{v_{m0}^2(1 - a^2) + v_{u0}^2}, \tag{4.5.4}$$

$$\beta_2'' = \beta_2 - \beta_1 + \beta_1'' = \beta_2 - \beta_1 + 180° - \arctan\left(\frac{a v_{m1}}{u - v_{u1}''}\right), \tag{4.5.5}$$

$$v_{u2}'' = u - \frac{a v_{m1}}{\tan(180° - \beta_2'')}. \tag{4.5.6}$$

El sistema de ecuaciones (4.5.3) a (4.5.6) se resuelve de forma iterativa. Puede comenzarse con un valor aproximado de a; por ejemplo, $a = 0{,}9$, que es el que

se obtendría si la altura útil no variase. De las ecuaciones (4.5.4), (4.5.5) y (4.5.6) se obtienen los valores correspondientes de v''_{u1}, β''_2 y v''_{u2}, respectivamente. Los valores de v''_{u1} y v''_{u2} se sustituyen en la ecuación (4.5.3) y se obtiene un nuevo valor de a. Este proceso se repite hasta que el valor de a no cambia significativamente. Compruébese que se obtiene finalmente $a = 0{,}907$ (para lo que basta una única iteración). Se deduce por tanto que el caudal debe reducirse en un

$$\boxed{(Q - Q'')/Q \times 100 = 9{,}3\,\%.}$$

Problema 4.6. Regulación de una turbina Kaplan (III)

Una turbina Kaplan de eje vertical, que funciona en condiciones nominales con un caudal $Q = 390\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$, está acoplada a un alternador que gira a una velocidad $n = 65{,}2$ rpm y tiene un rendimiento $\eta_e = 0{,}96$. La velocidad específica de la turbina es $\omega_s = 2{,}98$. Los diámetros interior y exterior del rodete son $D_{\mathrm{int}} = 3{,}5$ m y $D_{\mathrm{ext}} = 7{,}5$ m, respectivamente. Los rendimientos hidráulico, orgánico y volumétrico se tomarán $\eta_h = 0{,}9$, $\eta_o = 0{,}97$ y $\eta_v = 1{,}0$, respectivamente. Considérese que la componente axial del momento cinético es uniforme en la sección de entrada al rodete y, para el caudal indicado, nula en la sección de salida. Se supondrá que la dirección de la velocidad relativa en la sección de salida del rodete coincide en cualquier condición de funcionamiento con la dirección de sustentación nula de los álabes.

Determinar, para las condiciones nominales:

a) Potencia eléctrica generada.

b) Triángulos de velocidades en las secciones de entrada y de salida del rodete, en la posición radial correspondiente al diámetro medio.

Supóngase a continuación que los álabes del distribuidor se giran de forma que el caudal se reduce en un 5 %, el salto neto en un 3 % y el rendimiento hidráulico en un 7 %.

c) Determinar el ángulo que deben girar los álabes del rodete para mantener el ángulo de ataque en la posición radial correspondiente al diámetro medio.

Solución

a) De las ecuaciones

$$\omega_s = \Omega \frac{\dot{W}_t{}^{1/2} \rho^{3/4}}{(\rho g H_n)^{5/4}},$$

$$\dot{W}_t = \rho g Q H_n \eta_t,$$

$$\dot{W}_e = \eta_e \dot{W}_t,$$

se obtiene $H_n = 15{,}01$ m y

$$\boxed{\dot{W}_e = 48{,}14 \text{ MW}.}$$

b) $u = 18{,}78 \text{ m s}^{-1}$;
$v_m = 11{,}29 \text{ m s}^{-1}$;
$v_{u1} = 7{,}059 \text{ m s}^{-1}$;
$v_{u2} = 0$;
$\alpha_1 = 57{,}97°$;
$\beta_1 = 136{,}1°$;
$\beta_2 = 149{,}0°$.
(Los subíndices 1 y 2 denotan las secciones de entrada y salida del rodete.)

c) Teniendo en cuenta que, en las nuevas condiciones de funcionamiento,

$$v'_m = 0{,}95\, v_m = 10{,}72 \text{ m s}^{-1},$$
$$\eta'_h = 0{,}93\, \eta_h = 0{,}837,$$
$$H'_n = 0{,}97 H_n = 14{,}56 \text{ m},$$
$$\beta'_1 = \beta_1 + \Delta\beta,$$
$$\beta'_2 = \beta_2 + \Delta\beta,$$
$$g H'_u = g \eta'_h H'_n = u(v'_{u1} - v'_{u2}),$$
$$v'_{u1} = u - \frac{v'_m}{\tan(180° - \beta'_1)},$$
$$v'_{u2} = u - \frac{v'_m}{\tan(180° - \beta'_2)},$$

resulta

$$\frac{g \eta'_h H'_n}{u v'_m} = \frac{1}{\tan(180° - \beta_2 - \Delta\beta)} - \frac{1}{\tan(180° - \beta_1 - \Delta\beta)},$$

de donde, iterando, se obtiene

$$\boxed{\Delta\beta = -1{,}1°.}$$

Problema 4.7. Regulación de una turbina tubular

Una turbina tubular (grupo bulbo) con rodete de tipo Kaplan funciona en condiciones de diseño con un salto $H_n = 15$ m y un caudal $Q = 400\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$, alcanzando un rendimiento hidráulico $\eta_h = 0{,}9$. El rodete gira a una velocidad $\Omega = 6{,}8\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$, y tiene unos diámetros exterior e interior $D_{\mathrm{ext}} = 6$ m y $D_{\mathrm{int}} = 2{,}4$ m, respectivamente. Los álabes se han diseñado de forma que a lo largo de ellos la circulación se mantiene constante. La componente axial de la velocidad es uniforme en todo el rodete. La turbina dispone de un sistema que permite regular la potencia actuando simultáneamente sobre los álabes del distribuidor y del rodete, de tal forma que se mantenga constante el ángulo de ataque sobre los álabes de este. Se supondrá que el módulo de la velocidad absoluta del agua en la sección de entrada al rodete se mantiene constante, que los diámetros exterior e interior del distribuidor coinciden con los del rodete, que el momento cinético se conserva entre las secciones de salida del distribuidor y de entrada al rodete, que los álabes del distribuidor guían perfectamente el flujo y que no existen fugas de caudal.

Determinar:

a) Ángulos de los triángulos de velocidad en las secciones de entrada y salida del rodete y ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida, en la posición radial correspondiente al diámetro medio. Se supondrá que en las condiciones de diseño el agua sale del rodete sin componente acimutal.

b) Ángulo que deben girar los álabes del rodete si se giran 1° los álabes del distribuidor para reducir el caudal.

c) Rendimiento hidráulico en el punto de funcionamiento del apartado anterior.

Solución

a) La velocidad de arrastre en la posición radial correspondiente al diámetro medio,

$$D_m = \frac{D_{\mathrm{ext}} + D_{\mathrm{int}}}{2} = 4{,}200\ \mathrm{m},$$

es

$$u = \Omega \frac{D_m}{2} = 14{,}28\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

De la ecuación de Euler, se obtiene

$$v_{u1} = \frac{gH_u}{u} = \frac{gH_n\eta_h}{u} = 9{,}274 \text{ m s}^{-1}.$$

La componente meridiana de la velocidad es

$$v_m = v_{m1} = v_{m2} = \frac{4Q}{\pi(D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2)} = 16{,}84 \text{ m s}^{-1}.$$

Suponiendo, tal y como se indica en el enunciado, que los diámetros exterior e interior del distribuidor coinciden con los del rodete y que el momento cinético se conserva entre las secciones de salida del distribuidor y de entrada al rodete, los triángulos de velocidades en las secciones de salida del distribuidor y entrada del rodete resultan iguales entre sí. Así, con los valores antes calculados, se obtiene, del triángulo de velocidades a la entrada del rodete,

$$\boxed{\beta_1 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{v_m}{u - v_{u1}}\right) = 106{,}6^\circ,}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \arctan\left(\frac{v_m}{v_{u1}}\right) = 61{,}16^\circ,}$$

y del triángulo de velocidades a la salida,

$$\boxed{\beta_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{v_m}{u}\right) = 130{,}3^\circ.}$$

Obsérvese que el planteamiento sería diferente en turbinas Kaplan no tubulares, dado que en estas, además de no coincidir las secciones de paso en el distribuidor y en el rodete, en general el flujo en el primero es radial mientras que en el segundo es axial.

b) En la nueva situación, el ángulo de los álabes del distribuidor en la sección de salida es

$$\alpha_1' = \alpha_1 - 1^\circ = 60{,}16^\circ,$$

mientras que el módulo de la velocidad absoluta a la entrada del rodete no varía,

$$v_1' = v_1 = \sqrt{v_{m1}^2 + v_{u1}^2} = 19{,}23 \text{ m s}^{-1}.$$

El nuevo ángulo de la velocidad relativa en la sección de entrada al rodete es

$$\beta_1' = 180^\circ - \arctan\left(\frac{v_1 \operatorname{sen}\alpha_1'}{u - v_1\cos\alpha_1'}\right) = 105{,}8^\circ,$$

de lo que se deduce que el ángulo que deben girar los álabes del rodete es

$$\boxed{\Delta\beta = \beta_1' - \beta_1 = -0{,}8^\circ.}$$

c) El nuevo ángulo de los álabes en la sección de salida del rodete,

$$\beta_2' = \beta_2 + \Delta\beta = 129{,}5°,$$

junto con la reducción del caudal, dan lugar a un triángulo de velocidades con una componente acimutal distinta de cero

$$v_{u2}' = u - \frac{v_1 \operatorname{sen} \alpha_1'}{\tan(180° - \beta_2')} = 0{,}5214 \text{ m s}^{-1}.$$

De la ecuación de Euler se obtiene el nuevo valor de la altura útil,

$$H_u' = u\,\frac{v_1 \cos \alpha_1' - v_{u2}'}{g} = 13{,}17 \text{ m}.$$

Finalmente, el rendimiento hidráulico es

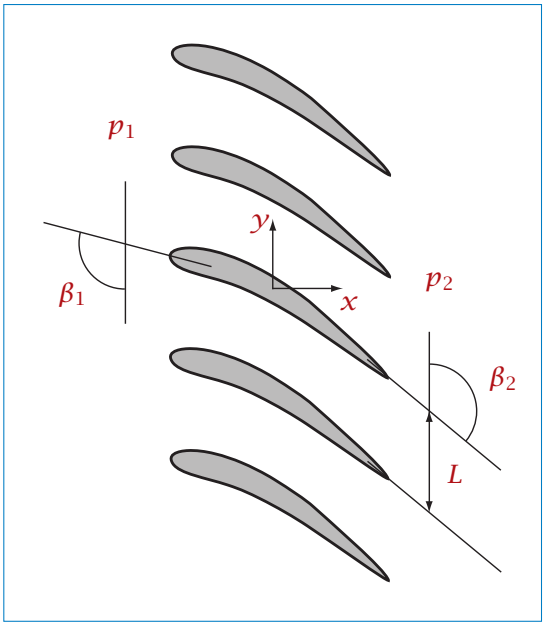
$$\boxed{\eta_h' = \frac{H_u'}{H_n} = 0{,}8778.}$$

Problema 4.8. Análisis de una cascada de álabes

En la figura se muestra una cascada de álabes del rodete de una turbina axial correspondiente al diámetro medio del rodete $D_m = 5$ m (superficie desarrollada de un cilindro coaxial con el eje de giro y de diámetro igual a D_m), en la que los ejes x e y corresponden a las direcciones axial y acimutal, respectivamente, y $L = \pi D_m / Z = 2{,}618$ m es la longitud de separación entre álabes, siendo Z el número de álabes.

Los ángulos de los álabes en las secciones de entrada y salida son $\beta_1 = 120°$ y $\beta_2 = 150°$, respectivamente. La velocidad meridiana es $v_m = 19 \text{ m s}^{-1}$ y la de arrastre, $u = 32 \text{ m s}^{-1}$.

Considérese que el movimiento es plano, que para la posición radial considerada las magnitudes son uniformes en las secciones de entrada y salida del rodete, que las pérdidas en el rodete son despreciables, que la velocidad relativa del agua en las secciones de entrada y salida del rodete es tangente a los álabes y que no hay fugas de caudal.



Determinar, para la posición radial correspondiente al diámetro medio del rodete:

a) Altura útil. Representar en la figura del enunciado los triángulos de velocidades en las secciones de entrada y salida del rodete.

b) Incremento de presión a través del rodete.

c) Componentes de la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre los álabes.

d) Circulación alrededor de cada perfil, indicando su sentido.

Solución

a) $H_u = 71{,}53$ m.

b) $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(w_2^2 - w_1^2) = 481$ kPa.

c) $F_x = (p_1 - p_2)L = 1260\ \mathrm{kN\,m^{-1}}$,
$F_y = \rho v_m L(v_{u1} - v_{u2}) = 1091\ \mathrm{kN\,m^{-1}}$.

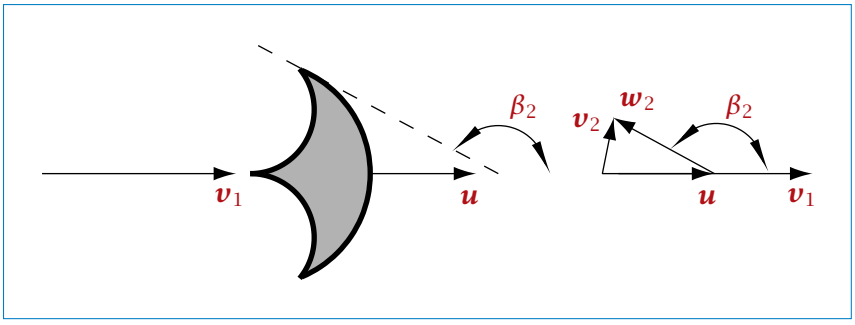
d) $\Gamma = L(v_{u1} - v_{u2}) = 57{,}44\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$ (sentido horario).

Capítulo 5

Turbinas Pelton

Problema 5.1. Condición de funcionamiento con máximo rendimiento en ausencia de pérdidas

Una turbina Pelton es impulsada por chorros de velocidad v_1, siendo u la velocidad periférica del rodete. El ángulo de salida de las cucharas es β_2. Despreciando todas las pérdidas por choque y por fricción, demostrar que el máximo rendimiento se obtiene cuando $v_1 = 2u$.



Solución

El rendimiento hidráulico de la turbina es

$$\eta_h = H_u / H_n. \tag{5.1.1}$$

Al despreciarse las pérdidas, el salto neto será igual a la altura correspondiente a la energía cinética del chorro incidente,

$$H_n = \frac{v_1^2}{2g}. \tag{5.1.2}$$

El salto útil es (ecuación (A.3.49) de Euler)

$$H_u = \frac{u(v_{u1} - v_{u2})}{g}. \tag{5.1.3}$$

Del triángulo de velocidades a la salida se deduce

$$v_{u2} = u - w_2 \cos(180^\circ - \beta_2). \tag{5.1.4}$$

Al despreciarse las pérdidas por fricción, la velocidad relativa al álabe se mantiene constante (como se deduce al aplicar la ecuación de Bernoulli al movimiento relativo):

$$w_2 = w_1 = v_1 - u. \tag{5.1.5}$$

Introduciendo la ecuación (5.1.5) en (5.1.4), y esta, a su vez, en (5.1.3), teniendo en cuenta que $v_{u1} = v_1$, se obtiene

$$H_u = \frac{u\{v_1 - [u + (v_1 - u)\cos\beta_2]\}}{g} = \frac{u(v_1 - u)(1 - \cos\beta_2)}{g}. \tag{5.1.6}$$

Introduciendo las ecuaciones (5.1.2) y (5.1.6) en (5.1.1) resulta

$$\eta_h = 2\xi(1 - \xi)(1 - \cos\beta_2),$$

siendo $\xi = u/v_1$. El máximo valor de η_h se obtiene para el valor de ξ que satisface[1]

$$\frac{d\eta_h}{d\xi} = (2 - 4\xi)(1 - \cos\beta_2) = 0;$$

es decir, para

$$\xi = \frac{u}{v_1} = 0{,}5.$$

[1] La existencia de pérdidas por choque y por fricción hace que el valor óptimo de ξ sea en realidad ligeramente inferior a 0,5 (en la práctica, del orden de un 10 % inferior).

Problema 5.2. Cálculos de los diámetros de rodete y chorro y de la velocidad de giro

Se quiere diseñar una turbina Pelton de un chorro con un salto neto $H_n = 300$ m y un caudal $Q = 0{,}48\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Se supondrá un coeficiente de velocidad en la tobera del inyector $C_v = 0{,}98$. Se tomará un coeficiente característico de velocidad de la turbina $K_u = u/\sqrt{2gH_n}$ obtenido a partir de la siguiente expresión, que lo relaciona con la velocidad específica, n_s:

$$n_s = 280 - 580\,K_u.$$

La relación entre los diámetros del chorro y del rodete, d/D, deberá ser próxima a $4{,}2\times10^{-3}\,n_s$ para poder conseguir el máximo rendimiento hidráulico, que se supondrá $\eta_h = 0{,}9$.

Determinar la velocidad de giro del rodete, el número de pares de polos del alternador y los diámetros del rodete y del chorro.

Solución

La potencia útil de la turbina se obtiene mediante la ecuación (A.3.31),

$$\dot{W}_u = (0{,}9)(1000)(0{,}48)(9{,}81)(300) = 1271\ \mathrm{kW} = 1730\ \mathrm{CV}.$$

La velocidad específica (dimensional) de la turbina se define por la ecuación (A.3.71), que permite obtener, sustituyendo en ella el valor de $\dot{W}_u$ (expresado en CV) que se acaba de obtener y el valor de $H_n = 300$ m, la siguiente relación:

$$n_s = n\,\frac{(1730)^{1/2}}{(300)^{5/4}} = 0{,}0333\,n \tag{5.2.1}$$

(n en rpm).

Si N es el número de pares de polos del alternador y $f = 50$ Hz la frecuencia de la red a la que este está conectado, la velocidad de giro del rodete (en rpm) será

$$n = \frac{60\,f}{N} = \frac{(60)(50)}{N} = \frac{3000}{N}. \tag{5.2.2}$$

La velocidad del chorro incidente es

$$v_1 = C_v\sqrt{2gH_n} = 0{,}98\sqrt{(2)(9{,}81)(300)} = 75{,}2\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

con lo que el diámetro del chorro es

$$d = \left(\frac{Q}{v_1 \pi/4}\right)^{1/2} = \left[\frac{0{,}48}{(75{,}2)\pi/4}\right]^{1/2},$$

de donde resulta

$$\boxed{d = 0{,}0902 \text{ m.}}$$

En el enunciado se indica que d/D deberá ser próximo a $4{,}2 \times 10^{-3}\, n_s$, por lo que, teniendo en cuenta el valor de d que se acaba de obtener, deberá cumplirse

$$n_s \approx \frac{21{,}5}{D} \tag{5.2.3}$$

(D en m).

Por otra parte, se indica en el enunciado que

$$n_s = 280 - 580\, K_u = 280 - 580\, \frac{u}{\sqrt{2gH_n}}.$$

Introduciendo en esta ecuación

$$u = \frac{2\pi n}{60}\frac{D}{2} = \frac{\pi n D}{60}$$

y sustituyendo valores, se obtiene

$$n_s = 280 - 0{,}396\, nD \tag{5.2.4}$$

(D en m, n en rpm).

Las ecuaciones (5.2.1) a (5.2.4) permiten determinar n, N, n_s y D. En la ecuación (5.2.2) existe la restricción de que N ha de ser entero. Despejando n de la ecuación (5.2.1) y D de la ecuación (5.2.3), y sustituyendo en la ecuación (5.2.4), se obtiene $n_s = 24{,}92$. Introduciendo este valor en la ecuación (5.2.1), resulta $n = 748{,}0$ rpm, y de (5.2.2) se obtiene $N = 4{,}1$. Si se toma

$$\boxed{N = 4}$$

(entero más próximo al valor que se acaba de obtener), de las ecuaciones (5.2.2), (5.2.1) y (5.2.4) se obtiene

$$\boxed{n = 750 \text{ rpm},}$$

$n_s = 24{,}98$ y

$$\boxed{D = 0{,}859 \text{ m};}$$

estos valores, junto con el de $d = 0{,}09$ m, antes calculado, constituyen la solución buscada. Obsérvese que la ecuación (5.2.3) se satisface con gran aproximación.

Problema 5.3. Cálculo de los diámetros de rodete y chorro y de la potencia nominal

Se quiere diseñar una turbina Pelton con un único chorro, que debe funcionar bajo un salto neto nominal $H_n = 550$ m y a una velocidad de giro $n = 750$ rpm. En estas condiciones nominales, la turbina funciona en el punto de máximo rendimiento para una relación entre el diámetro del rodete y el diámetro del chorro $D/d = 16$. Como en el Problema 5.2, se supondrá la siguiente relación entre el coeficiente característico de velocidad de la turbina $K_u = u/\sqrt{2gH_n}$ y la velocidad específica, n_s:

$$n_s = 280 - 580\,K_u,$$

y que el máximo rendimiento hidráulico, que en este caso se tomará igual a 0,8, se obtiene para

$$d/D = 4{,}2 \times 10^{-3}\, n_s.$$

Se supondrá un coeficiente de velocidad en la tobera del inyector (o coeficiente característico de velocidad, $K_{v_1} = v_1/(2gH_n)^{1/2}$; v_1 es la velocidad absoluta del agua a la salida del inyector) $C_v = 0{,}98$, independiente del caudal.

Determinar:

a) Diámetro del rodete.

b) Diámetro del chorro en condiciones nominales.

c) Potencia útil nominal.

Para un salto neto $H_n = 600$ m y la velocidad de giro nominal, determinar:

d) Diámetro del chorro necesario para mantener el máximo rendimiento.

e) Potencia útil. (Se supondrá que el máximo rendimiento posible en estas condiciones sigue siendo igual a 0,8.)

Solución

a) De la ecuación facilitada en el enunciado, que expresa la relación que debe existir entre d/D y n_s para alcanzar el máximo rendimiento,

$$d/D = 4{,}2 \times 10^{-3}\, n_s, \tag{5.3.1}$$

teniendo en cuenta que, según también se indica en el enunciado, el valor óptimo de D/d en condiciones nominales es de 16, se obtiene la velocidad específica de la turbina: $n_s = 14{,}88$.

De la relación

$$n_s = 280 - 580\,K_u, \tag{5.3.2}$$

introduciendo el valor de n_s que se acaba de obtener, resulta $K_u = 0{,}457$. Por tanto, la velocidad periférica será

$$u = K_u\sqrt{2gH_n} = 0{,}457\sqrt{(2)(9{,}81)(550)} = 47{,}48\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

y el diámetro del rodete

$$\boxed{D = \frac{u}{\pi n/60} = 1{,}21\ \mathrm{m}.}$$

b) El diámetro del chorro es

$$\boxed{d = \frac{D}{16} = 0{,}0756\ \mathrm{m}.}$$

c) La velocidad del chorro incidente es

$$v_1 = C_v\sqrt{2gH_n} = 0{,}98\sqrt{(2)(9{,}81)(550)} = 101{,}8\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

y el caudal

$$Q = v_1\,\frac{\pi d^2}{4} = 101{,}8\,\frac{\pi(0{,}0756)^2}{4} = 0{,}457\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.$$

La potencia útil nominal es

$$\boxed{\dot{W}_u = \eta_h\rho Q g H_n = (0{,}8)(1000)(0{,}457)(9{,}81)(550) = 1971\ \mathrm{kW}.}$$

d) Si el salto neto aumenta hasta 600 m, manteniéndose constante la velocidad de giro, el coeficiente K_u disminuirá y tomará el valor

$$K_u = \frac{u}{\sqrt{2gH_n}} = \frac{47{,}48}{\sqrt{(2)(9{,}81)(600)}} = 0{,}438.$$

De la ecuación (5.3.2) se obtiene $n_s = 26{,}16$. Suponiendo que la ecuación (5.3.1) sigue proporcionando el valor óptimo de d en las nuevas condiciones de funcionamiento, de dicha ecuación se obtiene

$$\boxed{d = 4{,}2\times10^{-3}\,n_s D = (4{,}2\times10^{-3})(26{,}16)(1{,}21) = 0{,}133\ \mathrm{m}.}$$

e) Suponiendo que se mantiene el valor de $C_v = 0{,}98$ (según se indica en el enunciado), la velocidad del chorro incidente es ahora

$$v_1 = C_v\sqrt{2gH_n} = 0{,}98\sqrt{(2)(9{,}81)(600)} = 106{,}3 \text{ m s}^{-1},$$

y el caudal

$$Q = v_1 \frac{\pi d^2}{4} = 106{,}3 \frac{\pi (0{,}133)^2}{4} = 1{,}475 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Suponiendo, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, el mismo rendimiento hidráulico de 0,8, la potencia útil en las nuevas condiciones de funcionamiento es

$$\boxed{\dot{W}_u = \eta_h \rho Q g H_n = (0{,}8)(1000)(1{,}475)(9{,}81)(600) = 6945 \text{ kW}.}$$

Obsérvese que la potencia que se acaba de obtener es muy superior a la nominal, lo que se debe fundamentalmente al aumento del diámetro del chorro incidente necesario para mantener un rendimiento elevado, lo que conduce a que el caudal se triplique con respecto al caudal nominal. En situaciones como la planteada en este problema, debe tenerse en cuenta, no obstante, que en realidad el diámetro del chorro incidente no puede ser aumentado por encima de un cierto límite. Por otra parte, un aumento del parámetro n_s debido a la variación de las condiciones de funcionamiento de la turbina da lugar a una disminución importante del rendimiento hidráulico, lo que hace que la suposición adoptada en este problema de que este se mantenga igual al óptimo en las nuevas condiciones de funcionamiento, alejadas de la nominal, no sea realista.

Problema 5.4. Cálculo del número de turbinas, diámetros de rodete y chorro, y caudal en una central

Se quiere construir una central hidroeléctrica que proporcione una potencia eléctrica total $\dot{W}_e = 20\,160$ kW en un emplazamiento en el que se dispone de un salto neto $H_n = 250$ m, instalando un cierto número de turbinas Pelton idénticas, funcionando todas ellas bajo las mismas condiciones. Las turbinas tendrán un único chorro y deberán girar a una velocidad $n = 650$ rpm, con una relación entre la velocidad de los álabes (velocidad periférica del rodete) y la velocidad del chorro $\xi = u/v_1 = 0{,}45$. La velocidad específica n_s de las turbinas deberá ser lo más próxima posible a 40, sin que supere este valor. Se supondrá un rendimiento total de las turbinas $\eta_t = 0{,}88$ y un rendimiento

del generador eléctrico $\eta_e = 0{,}96$. Se tomará un coeficiente de velocidad en la tobera del inyector $C_v = 0{,}96$.

La conducción del agua hasta las turbinas debe realizarse mediante dos tuberías en paralelo de igual diámetro, longitud $L = 1$ km y rugosidad $\varepsilon = 1$ mm, de forma que la altura neta a disposición de las turbinas sea la anteriormente indicada, teniendo en cuenta que el salto bruto es $H_b = 300$ m.

Determinar:

a) Número de turbinas que deben ser instaladas.

b) Diámetro del rodete de las turbinas.

c) Caudal que circulará por cada turbina.

d) Diámetro del chorro necesario en las turbinas.

e) Diámetro de las tuberías de alimentación de las turbinas.

Solución

a) La potencia en el eje de cada turbina es

$$\dot{W}_t = \frac{1}{\eta_e}\frac{\dot{W}_e}{N_t},$$

siendo N_t el número de turbinas de la central. La velocidad específica de las turbinas es

$$n_s = n\frac{\dot{W}_t{}^{1/2}}{H_n^{5/4}},$$

(n en rpm y $\dot{W}_t$ en CV). Sustituyendo valores, tomando para n_s el valor máximo de 40 indicado en el enunciado,

$$40 = 650\frac{\left(\dfrac{21\,000\times 10^3}{(0{,}96)(735)N_t}\right)^{1/2}}{250^{5/4}},$$

se obtiene un valor de $N_t = 7{,}635$. El entero más próximo que hace $n_s \leq 40$ es

$$\boxed{N_t = 8,}$$

por lo este es el número de turbinas que deben ser instaladas.

b) El agua sale del inyector con una velocidad

$$v_1 = C_v(2gH_n)^{1/2} = 67{,}23\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

A partir de la relación $\xi = u/v_1 = 0{,}45$ indicada en el enunciado, se obtiene $u = 30{,}26\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, y de la relación $u = \Omega D_r/2$, resulta un diámetro del rodete

$$\boxed{D_r = 0{,}889\ \mathrm{m}.}$$

c) El caudal que llega a cada turbina es

$$Q = \frac{\dot{W}_e}{\eta_e \eta_t \rho g H_n N_t} = \frac{20\,160 \times 10^3}{(0{,}96)(0{,}88)(1000)(9{,}81)(250)(8)},$$

de donde resulta

$$\boxed{Q = 1{,}216\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.}$$

d) El diámetro del chorro es

$$\boxed{d = \left(\frac{4Q}{\pi v_1}\right)^{1/2} = 0{,}152\ \mathrm{m}.}$$

e) La ecuación (A.3.37) queda de la forma siguiente:

$$H_b = H_n + f\,\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g},$$

donde v es la velocidad del agua en las tuberías de alimentación y D el diámetro de estas.

El factor de fricción,

$$f = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right),$$

puede obtenerse a partir del diagrama de Moody. Por otra parte,

$$\frac{N_t Q}{2} = v\,\frac{\pi D^2}{4}$$

y

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}.$$

De las cuatro ecuaciones anteriores, teniendo en cuenta que $N_t = 8$ y $\mu = 0{,}001\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$, de forma iterativa se obtiene $v = 6{,}855\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $f = 0{,}0198$, $\mathrm{Re} = 6{,}516 \times 10^6$ y

$$\boxed{D = 0{,}951\ \mathrm{m}.}$$

Problema 5.5. Alturas, rendimientos y diámetro del chorro

Una turbina Pelton funciona bajo un salto neto $H_n = 200$ m, y tiene un rendimiento máximo para una potencia de 700 kW, girando a una velocidad $n = 600$ rpm y con un caudal $Q = 0{,}6\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. El diámetro del rodete es $D = 830$ mm. El coeficiente de velocidad del inyector es de 0,97, el ángulo $\alpha_1 = 0°$ y el triángulo de velocidades de salida es rectángulo. Se considerarán despreciables las pérdidas por fricción en el rodete.

Calcular:

a) Altura de pérdidas en el inyector.

b) Altura correspondiente a la velocidad de salida.

c) Salto útil.

d) Ángulo de salida de los álabes, β_2.

e) Rendimiento hidráulico.

f) Rendimiento total.

g) Diámetro del chorro.

Solución

a) 11,82 m.

b) 26,67 m.

c) 161,5 m.

d) 138,8°.

e) 0,808.

f) 0,595.

g) 11,2 cm.

Problema 5.6. Influencia de las pérdidas por fricción en los álabes

Una turbina Pelton de eje horizontal con dos inyectores funciona con un salto neto $H_n = 500$ m, una velocidad de giro $\Omega = 78{,}5$ rad s^{-1} y un caudal $Q = 1$ m^3 s^{-1}. El diámetro del rodete es $D = 1200$ mm. Las cucharas desvían el chorro 165° y la pérdida de carga debida al rozamiento del fluido con la superficie de la cuchara se ha estimado en $0{,}1\, w_1^2/(2g)$, siendo w_1 la velocidad del chorro relativa a la cuchara. El coeficiente de velocidad en las toberas de los inyectores es $C_v = 0{,}98$ y el rendimiento orgánico de la turbina $\eta_o = 0{,}88$. Determinar:

a) Diámetro de los chorros.

b) Altura útil.

c) Potencia en el eje de la turbina.

Solución

a) El diámetro de cada chorro es

$$d = \sqrt{\frac{4q}{\pi v_1}} = 0{,}081 \text{ m},$$

siendo

$$q = Q/2 = 0{,}5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

y

$$v_1 = C_v\sqrt{2gH_n} = 97{,}06 \text{ m s}^{-1}$$

el caudal y la velocidad del agua a la salida de cada inyector, respectivamente.

b) En el triángulo de velocidades a la entrada del rodete se cumple

$$v_{u1} = v_1,$$

y

$$w_1 = v_1 - u = 49{,}96 \text{ m s}^{-1},$$

siendo

$$u = \Omega D/2 = 47{,}1 \text{ m s}^{-1},$$

y en el de salida,

$$v_{u2} = u - w_2 \cos(180° - \beta_2) = 1{,}315 \text{ m s}^{-1},$$

siendo

$$w_2 = w_1\sqrt{0{,}9} = 47{,}40 \text{ m s}^{-1}$$

(ecuación en la que se tiene en cuenta el efecto de la fricción en la superficie de la cuchara). Con estos valores se obtiene, de la ecuación de Euler,

$$\boxed{H_u = \frac{u(v_{u1} - v_{u2})}{g} = 459{,}7 \text{ m}.}$$

c) La potencia en el eje de la turbina es

$$\dot{W}_t = \eta_o \rho g Q H_u.$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\dot{W}_t = 3{,}969 \text{ MW}.}$$

Problema 5.7. Central con dos turbinas de seis chorros

Una central hidroeléctrica que consta de dos turbinas Pelton de idénticas características suministra una potencia eléctrica nominal de 152 MW. Cada turbina tiene seis inyectores distribuidos simétricamente alrededor de un rodete de eje vertical. Los rodetes tienen 20 álabes cada uno y un diámetro $D = 2{,}779$ m, y giran a una velocidad $n = 276{,}9$ rpm. La central turbina agua procedente de un embalse en el que la superficie del agua está situada a una altura de 428 m respecto del plano de las turbinas. La altura de pérdida de carga en la tubería forzada es un 11 % del salto bruto. El rendimiento total de las turbinas en condiciones nominales es $\eta_t = 0{,}917$, y el rendimiento del generador eléctrico es $\eta_e = 0{,}98$. Los rendimientos orgánico y volumétrico se supondrán iguales a la unidad. El coeficiente de velocidad en el inyector es $C_v = 0{,}98$. La altura correspondiente a la pérdida de energía debida a la velocidad de salida de los álabes es el doble de la correspondiente a la pérdida de energía por rozamiento en los álabes del rodete.

Determinar:

a) Caudal de agua que se deriva desde la presa hacia la central.

b) Diámetro de los chorros.

c) Alturas de pérdidas en el inyector, en los álabes del rodete y la debida a la velocidad de salida del rodete.

d) Ángulo β_2 de salida de los álabes del rodete.

e) Número de pares de polos del alternador si la frecuencia de la red es de 60 Hz.

Solución

a) De la expresión de la potencia eléctrica nominal,

$$\dot{W}_e = \eta_e \eta_t \rho g Q H_n,$$

donde la altura neta es

$$H_n = (1 - 0{,}11) H_b = 380{,}9 \text{ m},$$

se obtiene

$$Q = \frac{(152 \times 10^6)/(0{,}98)/(0{,}917)}{(9{,}81)(1000)(380{,}9)},$$

de donde resulta

$$\boxed{Q = 45{,}26 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.}$$

b) El diámetro del chorro que sale de cada uno de los 12 inyectores viene dado por

$$d_0^2 = \frac{1}{12} \frac{Q}{v_1 \pi / 4},$$

siendo

$$v_1 = C_v (2 g H_n)^{1/2} = 84{,}72 \text{ m s}^{-1}$$

la velocidad del agua a la salida del inyector. Sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{d_0 = 0{,}238 \text{ m}.}$$

c) La altura de pérdidas en la turbomáquina viene dada por

$$H_L = H_n (1 - \eta_h) = H_n \left[1 - \frac{\eta_t}{\eta_o \eta_v} \right],$$

siendo $\eta_o = \eta_v = 1$. Por otro lado, la altura de pérdidas se puede descomponer en las tres componentes que deben ser calculadas en este apartado como sigue:

$$H_L = H_{L_i} + H_{L_r} + H_{L_s},$$

donde $H_{L_s} = 2\,H_{L_r}$ y

$$\boxed{H_{L_i} = H_n - \frac{v_1^2}{2g} = 15{,}08 \text{ m}.}$$

De las ecuaciones anteriores, sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{H_{L_r} = 5{,}511 \text{ m}}$$

y

$$\boxed{H_{L_s} = 11{,}02 \text{ m}.}$$

d) En la sección de salida del álabe, las velocidades absoluta y de arrastre son

$$v_2 = (2gH_{L_s})^{1/2} = 14{,}71 \text{ m s}^{-1},$$

$$u = n\,\frac{2\pi}{60}\,\frac{D}{2} = 40{,}29 \text{ m s}^{-1},$$

y la velocidad relativa, $w_2 = 43{,}20 \text{ m s}^{-1}$, se obtiene de

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} + H_{L_r}, \qquad (5.7.1)$$

donde

$$w_1 = v_1 - u = 44{,}43 \text{ m s}^{-1}.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo de velocidades en la sección de salida, resulta

$$v_2^2 = u^2 + w_2^2 - 2uw_2 \cos(180 - \beta_2), \qquad (5.7.2)$$

de donde, despejando y sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{\beta_2 = 160{,}1°.}$$

e) El número de pares de polos del alternador es

$$\boxed{N = \frac{60\,f}{n} = (60)(60)/(276{,}9) = 13.}$$

Problema 5.8. Regulación de una turbina

Una turbina Pelton con dos inyectores se encuentra situada a una cota 300 m por debajo de la superficie libre del agua en un embalse. La turbina toma agua del embalse a través de una tubería forzada que tiene una longitud $L = 2$ km y un diámetro $D_t = 50$ cm, en la que el factor de fricción es $f = 0{,}006$. El coeficiente de velocidad en las toberas de los inyectores es $C_v = 0{,}97$, el diámetro de los chorros es $d = 90$ mm, el ángulo de salida de los álabes es $\beta_2 = 165°$ y la fricción en los álabes produce una reducción de la velocidad relativa del 15 %.

a) Suponiendo despreciables las pérdidas por fricción y por choque, determinar la relación entre la velocidad periférica del rodete y la velocidad absoluta del chorro incidente sobre los álabes, $u = f(v_1)$, para la que se obtiene el máximo rendimiento hidráulico y el valor de este máximo.

b) Determinar el caudal y la potencia total de la turbina suponiendo que se satisface la relación $u = 0{,}48 v_1$, y que los rendimientos orgánico y volumétrico son del 96 % y 98 %, respectivamente.

c) La regulación de la potencia de la turbina se realiza actuando sobre el diámetro de los chorros, manteniéndose constante la velocidad de giro. Determinar el nuevo valor del diámetro de los chorros necesario para adaptar el funcionamiento de la turbina a la demanda de potencia, si esta es un 10 % inferior a la obtenida en el apartado anterior (téngase en cuenta que al variar el caudal varía la pérdida de carga en la tubería forzada) y el nuevo valor de la relación u/v_1. Se seguirá utilizando el mismo valor de C_v.

Solución

a) El rendimiento hidráulico se puede expresar de la siguiente forma:

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = \frac{\frac{u}{g}(v_{u1} - v_{u2})}{\frac{v_1^2}{2g\,C_v^2}}, \tag{5.8.1}$$

donde

$$v_{u1} = v_1$$

y

$$v_{u2} = u - w_2 \cos(180° - \beta_2)$$

son las componentes acimutales de la velocidad en las secciones de entrada y salida, respectivamente, y, a su vez,

$$w_2 = 0{,}85\, w_1 = 0{,}85\, (v_1 - u)$$

es la velocidad relativa en la sección de salida, que es un 15 % menor que la velocidad relativa en la sección de entrada.

Sustituyendo en la ecuación (5.8.1), resulta

$$\eta_h = 2\, C_v^2 \xi (1 - \xi)\, [1 + 0{,}85 \cos(180° - \beta_2)]\,,$$

siendo

$$\xi = \frac{u}{v_1}.$$

Derivando η_h con respecto a ξ e igualando a 0, se obtiene

$$\boxed{\xi = 0{,}5.}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación $\eta_h = \eta_h(\xi)$, resulta

$$\boxed{\eta_{h,\text{máx}} = 0{,}857.}$$

b) El salto bruto es

$$H_b = H_n + H_\varphi,$$

donde

$$H_\varphi = 8Q^2 f L/(\pi^2 g D_t^5)$$

es la altura de pérdidas en la tubería forzada. Teniendo en cuenta que la velocidad absoluta del chorro incidente es

$$v_1 = \frac{Q/2}{\pi d^2/4},$$

el salto neto puede expresarse como

$$H_n = \frac{2Q^2}{\pi^2 g d^4 C_v^2}.$$

Sustituyendo H_n y H_φ en la expresión de H_b y despejando el caudal, se obtiene

$$\boxed{Q = 0{,}905\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1},}$$

y, a partir de este,

$$H_n = 274 \text{ m}.$$

Teniendo en cuenta que $\eta_h|_{\xi=0,48} = 0{,}855$, resulta

$$\boxed{\dot{W}_t = \eta_o \eta_v \eta_h \rho g Q H_n = 1{,}96 \text{ MW}.}$$

c) Para reducir la potencia a un valor $0{,}9\dot{W}_t$ es necesario reducir el caudal hasta alcanzar un cierto valor Q'. Al reducirse el caudal, varían las pérdidas en la tubería forzada, por lo que también varía el salto neto,

$$H'_n = H_b - \frac{8Q'^2 f L}{\pi^2 g D_t^5} = 300 - 31{,}7\, Q'^2 \tag{5.8.2}$$

(H'_n en m y Q' en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$). Al variar el salto neto, varía la velocidad de los chorros incidentes y, por tanto, la altura útil,

$$H'_u = \frac{u}{g}(C_v\sqrt{2gH'_n} - u)[1 + 0{,}85\cos(180° - \beta_2)] = 27{,}2\, {H'_n}^{1/2} - 216$$

(en m). Por otro lado, el caudal necesario para generar la nueva potencia está determinado a su vez por el salto neto:

$$Q' = \frac{0{,}9\dot{W}_t}{\eta_o \eta_v \rho g H'_u} = \frac{191}{H'_u} = \frac{191}{27{,}2\, {H'_n}^{1/2} - 216} \tag{5.8.3}$$

(H'_n en m y Q' en $\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$). El sistema de ecuaciones (5.8.2)–(5.8.3) se resuelve de forma iterativa. Comenzando con un valor $Q'^{i} = 0{,}9\,Q = 0{,}814\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, de la ecuación (5.8.2) se obtiene ${H'_n}^{i} = 279$ m, y de la ecuación (5.8.3), $Q'^{ii} = 0{,}801\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$. Tomando este último valor, en la segunda iteración se obtiene ${H'_n}^{ii} = 280$ m y $Q'^{iii} = 0{,}799\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, y en la tercera, ${H'_n}^{iii} = 280$ m y $Q'^{iv} = 0{,}798\ \text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, valores que en principio se pueden dar por válidos (se comprueba que en la siguiente iteración los valores obtenidos no cambian apreciablemente). Para estos últimos valores de Q' y H'_n, resulta $v_1 = 71{,}9\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ y

$$\boxed{u/v_1 = 0{,}475.}$$

Para conseguir el caudal Q', debe reducirse el diámetro de los chorros hasta un valor

$$\boxed{d' = \sqrt{\frac{4(Q/2)}{\pi v_1}} = 0{,}084 \text{ m}.}$$

Capítulo 6

Aeroturbinas

Problema 6.1. Variación con la altura sobre el terreno de la velocidad media del viento

A partir de las medidas de la velocidad del viento realizadas en un determinado emplazamiento a 10 y 25 m de altura, durante un cierto periodo de tiempo en el que la velocidad media se mantuvo constante, se obtuvieron los siguientes valores de la velocidad media: $\overline{v}_{10} = 8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\overline{v}_{25} = 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, y de la desviación típica: $\sigma_{10} = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\sigma_{25} = 0{,}6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, respectivamente.

Suponiendo una atmósfera neutra, determinar el perfil de variación de la velocidad media del viento con la altura y la intensidad de la turbulencia a las alturas de medida.

Solución

De la ecuación que define un perfil logarítmico de la velocidad media del viento,[1]

$$\overline{v}(z) = 2{,}5\,u^* \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + \Psi\right],$$

[1] Para mantener una notación consistente con la de los restantes capítulos, en este capítulo la velocidad absoluta del viento se denotará por $\boldsymbol{v}$ y la velocidad de arrastre (velocidad de un elemento de pala de la aeroturbina) se denotará por $\boldsymbol{u}$. Sin embargo, siguiendo la notación habitual en la literatura, y aunque no resulte consistente con lo anterior, la velocidad de fricción turbulenta del viento se denotará por u^*.

teniendo en cuenta los datos del enunciado y que $\Psi = 0$ al tratarse de una atmósfera neutra, se pueden obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$\overline{v}_{10} = 8 = 2{,}5\, u^* \ln\left(\frac{10}{z_0}\right),$$

$$\overline{v}_{25} = 12 = 2{,}5\, u^* \ln\left(\frac{25}{z_0}\right),$$

en las que aparecen dos incógnitas: la velocidad de fricción turbulenta, u^* (en $\mathrm{m\,s^{-1}}$), y la rugosidad del terreno, z_0 (en m). Dividiendo la primera de estas ecuaciones por la segunda, se obtiene $\frac{2}{3} = \ln(10/z_0)/\ln(25/z_0)$, de donde resulta $z_0 = 10^3/25^2 = 1{,}6$ m. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos expresiones anteriores, se obtiene $u^* = 1{,}746\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. El perfil de variación de la velocidad media del viento con la altura queda, por tanto, como sigue:

$$\boxed{\overline{v}(z) = 4{,}365 \ln\left(\frac{z}{1{,}6}\right)}$$

(con z en m y $\overline{v}$ en $\mathrm{m\,s^{-1}}$).

La intensidad de la turbulencia es

$$I = \frac{\sigma_v}{\overline{v}},$$

por lo que

$$\boxed{I_{10} = 0{,}0625 \text{ e } I_{25} = 0{,}05.}$$

Problema 6.2. Funciones de densidad y distribución de probabilidad en un emplazamiento

La función de densidad de probabilidad de la velocidad del viento en un determinado emplazamiento se ajusta a una distribución de Rayleigh (distribución de Weibull con un factor de forma $k = 2$), dada por

$$f(v) = \frac{2v}{c^2} \exp[-(v/c)^2],$$

siendo $c = 8{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. En este emplazamiento se instala un aerogenerador de 70 m de diámetro, cuyas velocidades de arranque y parada son, respectivamente, $v_a = 3$ y $v_p = 25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Se supondrá un rendimiento orgánico $\eta_o = 0{,}97$, un rendimiento eléctrico $\eta_e = 0{,}98$ y una densidad del aire $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Determinar:

a) Función de distribución de probabilidad $P(v > v_0)$.

b) Número de horas al año en las que podría estar en funcionamiento el aerogenerador suponiendo un factor de utilización del 98 %.

c) Velocidad más probable del viento en el emplazamiento y probabilidad de que el viento sople a una velocidad superior a este valor más probable.

d) Potencia eléctrica que genera el aerogenerador para una velocidad del viento igual a la velocidad más probable, sabiendo que a esa velocidad el coeficiente de potencia es $C_p = 0{,}36$.

Solución

a) $P(v > v_0) = \exp\left[-(v_0/c)^2\right]$.

$$\left[P(v > v_0) = \int_{v_0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = -\exp\left[-(v/c)^2\right]\Big|_{v_0}^{\infty}.\right]$$

b) $t = 7532$ horas.

$$[t = (0{,}98)(8760)[P(v > v_a) - P(v > v_p)].]$$

c) $v_{\text{prob}} = 5{,}87\ \text{m s}^{-1}$.

$$\left[\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0 \Rightarrow v_{\text{prob}} = c/\sqrt{2}.\right]$$

$P(v > v_{\text{prob}}) = 0{,}61$.

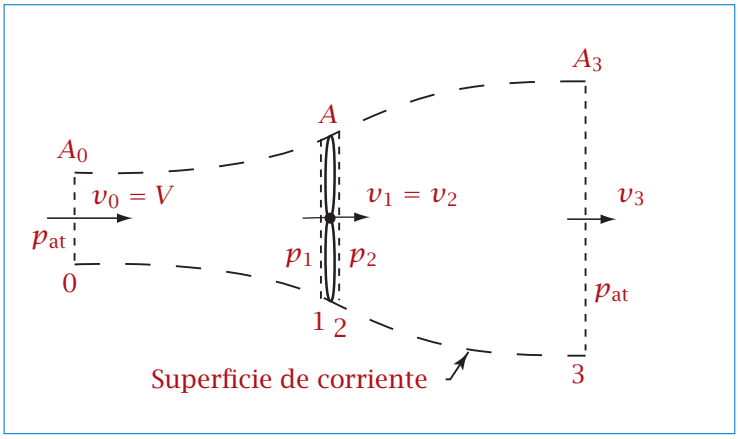
d) $P_e = 159{,}7$ kW.

Problema 6.3. Aplicación de la teoría del disco actuador

En la figura se muestra un esquema del flujo idealizado alrededor de una aeroturbina, situada entre las secciones 1 y 2 de la figura. Se ha representado con línea discontinua la superficie de corriente que idealmente separa el aire que atraviesa la aeroturbina del aire exterior. Se despreciará la posible resultante de las fuerzas de presión sobre dicha superficie de corriente. Se supondrá que el rotor está formado por un número infinito de palas que

barren una superficie de área A, pudiendo considerarse el flujo unidimensional. En la sección 0, situada suficientemente aguas arriba de la aeroturbina, la velocidad del viento es V y la presión del aire, p_{at}. En la sección 3, situada suficientemente aguas abajo de la aeroturbina, la presión del aire vuelve a ser p_{at}. La densidad del aire es ρ.

Se considerará que el efecto de la rotación de la estela y los efectos viscosos son despreciables, que las magnitudes fluidas son uniformes en las secciones 0, 1, 2 y 3, y que V, A y ρ son, junto con el valor del coeficiente de velocidad inducida axial, $a = 1 - v_1/V$, datos conocidos.



Determinar:

a) Flujo másico de aire que atraviesa el rotor y relación A_0/A.

b) Fuerza de empuje sobre la aeroturbina en función de v_3.

c) Diferencia de presión entre las secciones 1 y 2 en función de v_3.

d) Velocidad en la sección 3 y relación A_3/A.

e) Coeficiente de empuje de la aeroturbina.

f) Variación cualitativa de la velocidad y la presión del aire a lo largo del tubo de corriente entre las secciones 0 y 3. Representar gráficamente esta variación.

g) Valores de las magnitudes de los apartados a), b) y e) para los datos siguientes: $\rho = 1{,}1\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, $V = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $A = 800\ \mathrm{m^2}$, $a = 0{,}26$.

Solución

a) El flujo másico de aire que atraviesa el rotor, teniendo en cuenta que $v_1 = V(1-a)$, es

$$\boxed{\dot{m} = \rho A v_1 = \rho A V(1-a).} \tag{6.3.1}$$

A partir de la ecuación (A.1.3) de conservación de la masa, utilizando como volumen de control el tubo de corriente comprendido entre las secciones 0 y 1, se obtiene

$$A v_1 = A_0 V,$$

y teniendo en cuenta la ecuación (6.3.1), resulta finalmente

$$\boxed{\frac{A_0}{A} = 1 - a.}$$

b) La fuerza de empuje que ejerce el aire sobre el rotor se deduce a partir de la ecuación (A.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento, utilizando un volumen de control limitado por la superficie de corriente y las secciones 0 y 3:

$$\boxed{E = \rho A V(1-a)(V - v_3).} \tag{6.3.2}$$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 0 y 1 y entre las secciones 2 y 3, se obtiene

$$\frac{p_{\text{at}}}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2},$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_{\text{at}}}{\rho} + \frac{v_3^2}{2}.$$

Restando entre sí estas ecuaciones, se obtiene

$$\boxed{p_1 - p_2 = \rho(V^2 - v_3^2)/2.} \tag{6.3.3}$$

d) Aplicando la ecuación (A.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al tubo de corriente limitado por las secciones 1 y 2, se deduce que la fuerza de empuje sobre la aeroturbina, al mantenerse constante la velocidad axial a través del rotor, es proporcional a la diferencia de presiones entre las secciones 1 y 2:

$$E = (p_1 - p_2)A. \tag{6.3.4}$$

Igualando esta expresión a la de la ecuación (6.3.2) y sustituyendo el valor de $p_1 - p_2$ de la ecuación (6.3.3), resulta

$$\boxed{v_3 = V(1-2a).} \tag{6.3.5}$$

De la aplicación de la ecuación de conservación de la masa al volumen de control limitado por la superficie de corriente y las secciones 2 y 3, se obtiene

$$\boxed{\frac{A_3}{A} = \frac{v_1}{v_3} = \frac{1-a}{1-2a}.} \tag{6.3.6}$$

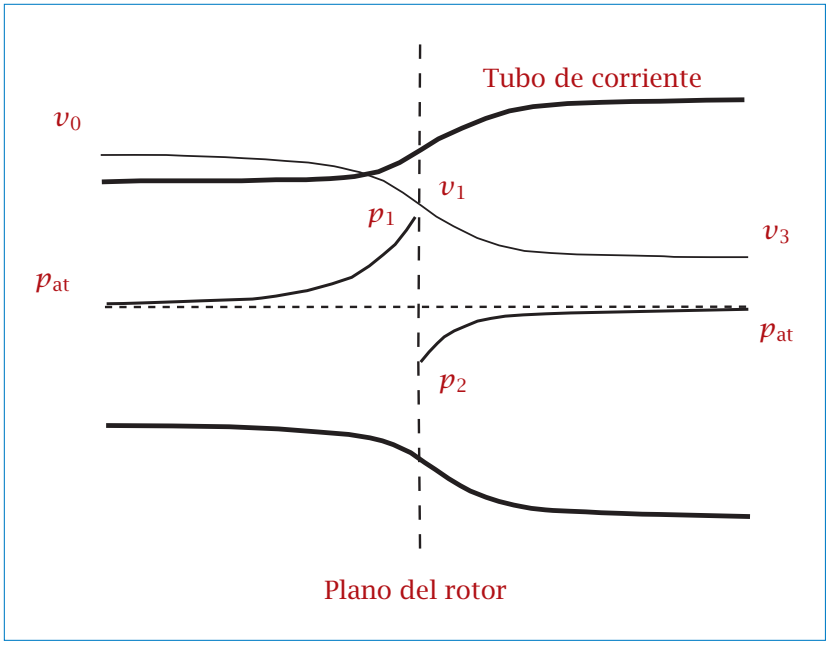
e) Sustituyendo la ecuación (6.3.5) en la ecuación (6.3.2), se obtiene

$$E = 2\rho A V^2 a(1-a)$$

y un coeficiente de empuje

$$\boxed{C_E = \frac{E}{\frac{1}{2}\rho A V^2} = 4a(1-a).} \tag{6.3.7}$$

f) La variación cualitativa de la velocidad y la presión del aire en el interior del tubo de corriente considerado puede representarse como sigue:

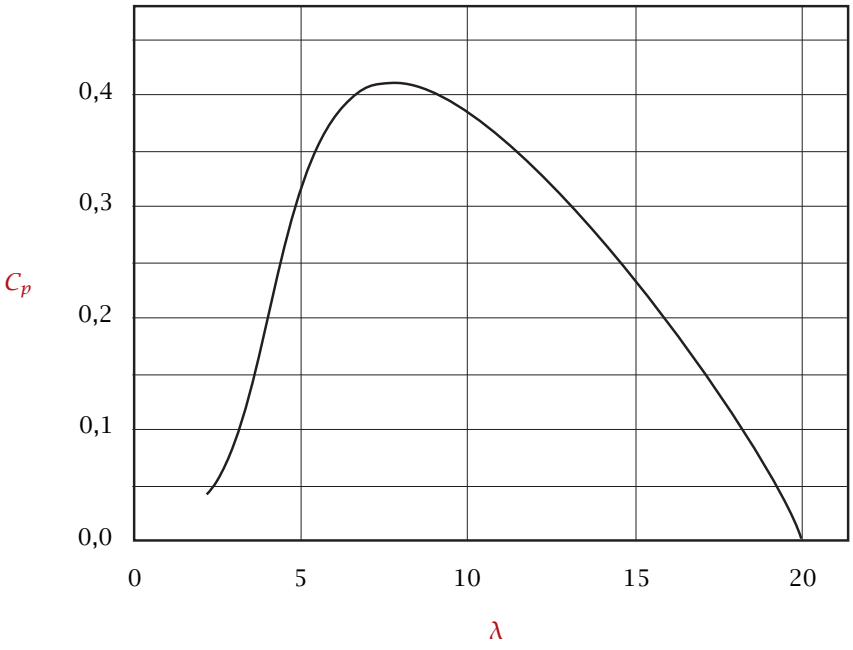


g) $\dot{m} = 6512$ kg s^{-1}, $E = 33{,}86$ kN y $C_E = 0{,}77$.

Problema 6.4. Coeficiente de potencia, potencia en el eje y potencia nominal

En la figura se muestra la curva del coeficiente de potencia en función de la relación entre la velocidad de punta de pala y la velocidad del viento, $C_p = C_p(\lambda)$, de un aerogenerador tripala de eje horizontal, con un rotor de diámetro $D = 60$ m y palas con ángulo de paso fijo, que gira a una velocidad constante $n = 18{,}8$ rpm. Las velocidades nominal y de parada del viento son $v_n = 16\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y $v_p = 25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, respectivamente.

Se supondrá que, en unas determinadas condiciones de funcionamiento, la aeroturbina se encuentra orientada al viento, y que la dirección y la velocidad media de este se mantienen constantes, siendo esta última $V = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ a la altura del buje del rotor. Se supondrá que la densidad del aire es $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.



Determinar:

a) Velocidad de punta de pala.

b) Coeficiente de potencia de la aeroturbina y potencia mecánica en el eje del rotor para las condiciones de funcionamiento indicadas.

c) Coeficiente de potencia para la velocidad nominal del viento y potencia nominal del aerogenerador. Supónganse unos rendimientos del multiplicador[2] y del generador eléctrico $\eta_{\text{mul}} = 0{,}97$ y $\eta_e = 0{,}98$, respectivamente.

d) Relación de transmisión del multiplicador si el generador eléctrico instalado es un generador asíncrono de 4 polos (considérese el deslizamiento despreciable).

e) Máxima potencia teórica que podría generar una aeroturbina ideal con la misma área del rotor y una velocidad del viento igual a la nominal.

Solución

a) La velocidad de punta de pala es

$$u_p = n\frac{2\pi}{60}D/2 = 59{,}06 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Para la velocidad específica correspondiente a las condiciones indicadas en el enunciado, $\lambda = u_p/V = 5{,}91$, de la figura se obtiene un valor aproximado de $C_p = 0{,}37$, y con este valor y el área del rotor, $A = \pi D^2/4 = 2827 \text{ m}^2$, resulta un valor aproximado de la potencia en el eje de la aeroturbina

$$\dot{W}_t = C_p \tfrac{1}{2}\rho V^3 A = 628 \text{ kW}.$$

c) La velocidad específica nominal es

$$\lambda_n = \frac{u_p}{v_n} = 3{,}69,$$

[2] A pesar de su denominación, el rendimiento del multiplicador tiene en cuenta también pérdidas de energía en otros elementos mecánicos que, además del multiplicador, existan entre el buje del rotor y el eje del generador eléctrico, y que determinen una reducción de la potencia en el eje de la turbina. Sería equivalente al rendimiento orgánico que se ha utilizado en los restantes capítulos y en el Problema 6.2. Por otra parte, el multiplicador puede no existir en algunos aerogeneradores, en cuyo caso el término rendimiento orgánico es más apropiado.

valor para el que se obtiene de la figura un valor aproximado del coeficiente de potencia

$$\boxed{C_p = 0{,}16}$$

y una potencia nominal en el eje de la aeroturbina (eje de baja velocidad)

$$\dot{W}_{t,n} = C_p \tfrac{1}{2}\rho u_n^3 A = 1112 \text{ kW}.$$

La potencia nominal del aerogenerador es la potencia nominal proporcionada por el generador eléctrico,

$$\boxed{\dot{W}_{e,n} = \eta_{\text{mul}}\eta_e \dot{W}_{t,n} = 1057 \text{ kW}.}$$

d) Suponiendo que la frecuencia de la red es $f = 50$ Hz y teniendo en cuenta que el número de pares de polos del alternador es $N = 2$, la velocidad de sincronismo resulta

$$n_e = 60f/N = 1500 \text{ rpm}.$$

Despreciando la diferencia entre la velocidad de sincronismo y la velocidad del eje del alternador, tal como se indica en el enunciado, se obtiene una relación de transmisión

$$\boxed{r_t = n_e/n = 1500/18{,}8 = 79{,}79.}$$

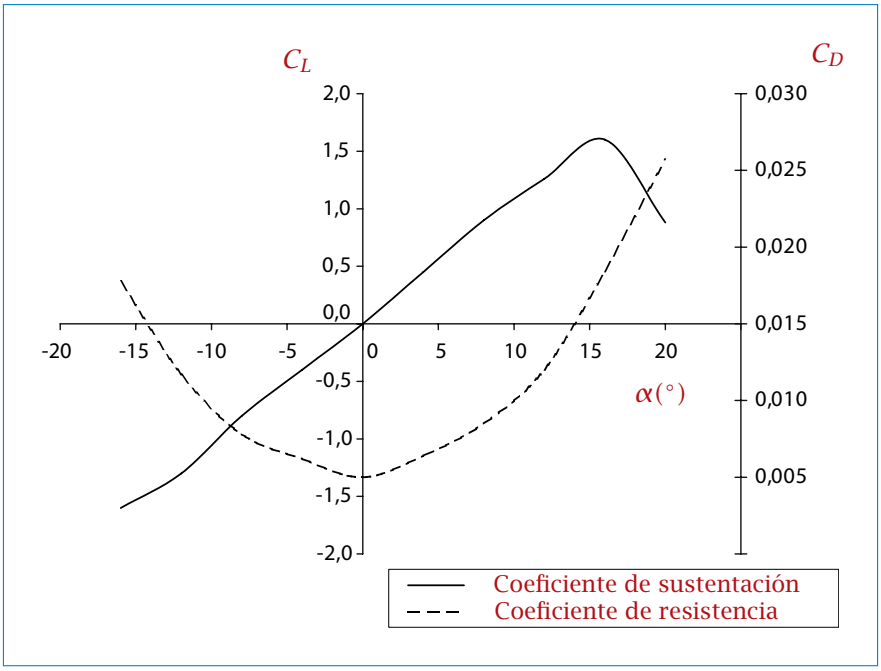
e) La máxima potencia viene dada por el límite de Betz del coeficiente de potencia $C_{p,\text{máx}} = 16/27$, para el que resulta

$$\boxed{\dot{W}_{t,\text{máx}} = \tfrac{16}{27}\tfrac{1}{2}\rho v_n^3 A = 4118 \text{ kW}.}$$

Problema 6.5. Fuerzas, momentos y coeficientes de fuerza sobre una aeroturbina

En una determinada aeroturbina tripala, el elemento de pala situado a una distancia $r_e = 18$ m del buje tiene una cuerda $c = 1$ m y un ángulo de torsión $\theta = 13°$, y corresponde a un perfil NACA 0012. Los coeficientes de sustentación, C_L, y resistencia, C_D, de dicho perfil aparecen representados en la figura adjunta en función del ángulo de ataque, α, para $\text{Re} \simeq 10^6$. La velocidad del viento incidente, sin perturbar por la aeroturbina, es $V = 15 \text{ m s}^{-1}$. La velocidad del aire en el plano del rotor es uniforme y perpendicular a este, siendo $a = 0{,}28$ el coeficiente de velocidad inducida axial. El rotor gira a una

velocidad constante $n = 17{,}7$ rpm y se supondrá que la densidad del aire es $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$. No se tendrán en cuenta los efectos de rotación de la estela.



a) Dibujar de forma cualitativa y esquemática los siguientes elementos y magnitudes (según lo indicado en el enunciado, el coeficiente de velocidad inducida angular $a' = 0$):

- perfil aerodinámico, línea de cuerda y plano de rotación;
- vector velocidad del viento en el plano del rotor, $\boldsymbol{v}$, vector velocidad relativa al elemento de pala, $\boldsymbol{w}$, y velocidad de arrastre de la pala, $\boldsymbol{u}$;
- ángulos de ataque, α, de torsión, θ, y de incidencia, ϕ, y
- fuerzas resultante, $\boldsymbol{F}$, de sustentación, $\boldsymbol{F}_L$, y de resistencia, $\boldsymbol{F}_D$, sobre el perfil.

b) Calcular las componentes de la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre el elemento de pala en direcciones paralela y normal al rotor (F_T y F_N, respectivamente).

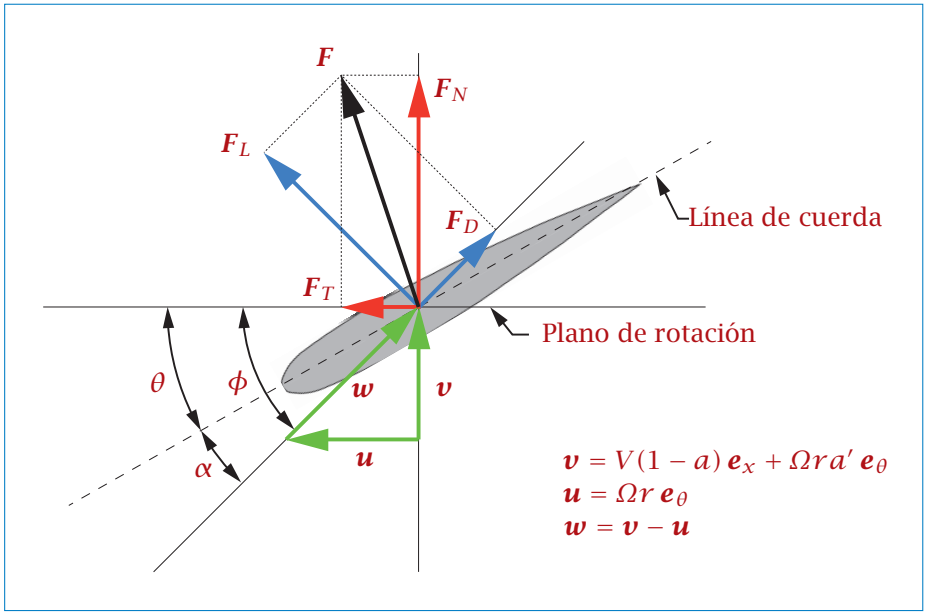
c) Calcular el momento, M_T, con respecto al buje de la componente de la fuerza por unidad de longitud F_T.

d) Suponiendo un diámetro del rotor $D = 50$ m, una altura de la torre $h_T = 45$ m, un comportamiento perfectamente rígido del aerogenerador y que la fuerza normal al rotor por unidad de longitud, calculada en el apartado b), es la misma para todos los elementos de pala que componen el rotor, calcular el momento flector, M_N, de la fuerza de empuje sobre el rotor con respecto a la base de la torre.

e) Repetir el apartado b) suponiendo que el rotor gira a 10,5 rpm.

Solución

a) En la figura siguiente se representan de forma cualitativa los elementos y magnitudes indicados en el enunciado:



b) El módulo de la velocidad del viento en el plano del rotor es

$$v = V(1-a) = 10{,}8 \text{ m s}^{-1}.$$

El módulo de la velocidad de arrastre del elemento de pala es

$$u = \Omega r = 33{,}36 \text{ m s}^{-1}.$$

A partir del triángulo de velocidad en el plano del rotor, se calcula el ángulo de incidencia sobre el elemento de pala considerado:

$$\phi = \arctan(v/u) = 17{,}93^\circ.$$

El ángulo de ataque sobre el perfil resulta $\alpha = \phi - \theta \approx 5^\circ$. A partir de este valor de α, de la figura proporcionada en el enunciado se obtienen los siguientes coeficientes de sustentación y resistencia:

$$C_L \approx 0{,}55,\ C_D \approx 0{,}007.$$

Con estos valores, las fuerzas de sustentación y resistencia por unidad de longitud, teniendo en cuenta que $w = \sqrt{v^2 + u^2} = 35{,}07\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, resultan

$$F_L = \tfrac{1}{2} C_L \rho w^2 c = 405{,}8\ \mathrm{N\,m^{-1}},\ F_D = \frac{1}{2} C_D \rho w^2 c = 5{,}165\ \mathrm{N\,m^{-1}}.$$

Las componentes de la fuerza por unidad de longitud sobre el elemento de pala, en direcciones paralela y normal al plano del rotor, resultan finalmente

$$\boxed{F_T = F_L \operatorname{sen}\phi - F_D \cos\phi = 120{,}1\ \mathrm{N\,m^{-1}},}$$

$$\boxed{F_N = F_L \cos\phi + F_D \operatorname{sen}\phi = 387{,}7\ \mathrm{N\,m^{-1}}.}$$

c) El momento (por unidad de longitud) con respecto al eje del rotor de la componente F_T de la fuerza que se ejerce sobre el elemento de pala considerado, situado a una distancia $r_e = 18$ m de dicho eje, es

$$\boxed{M_T = F_T r_e = 2161\ \mathrm{N}.}$$

d) Con las hipótesis indicadas en el enunciado, teniendo en cuenta que la aeroturbina consta de 3 palas, el módulo del momento flector en la base de la torre debido a la fuerza de empuje sobre la turbina es[3]

$$\boxed{M_N = 3F_N \frac{D}{2} h_T = 1308\ \mathrm{kN\,m}.}$$

e) Con la nueva velocidad de giro cambia el ángulo de ataque sobre el perfil, con lo que resulta (tomando $C_L \approx 1{,}6$ y $C_D \approx 0{,}017$)

$$\boxed{F_T = 229{,}2\ \mathrm{N\,m^{-1}},\ F_N = 430{,}9\ \mathrm{N\,m^{-1}}.}$$

[3] Explíquese qué ocurriría si la aeroturbina constase solo de una pala o si se tuviera en cuenta la variación de la velocidad del viento con la altura sobre el terreno.

Problema 6.6. Velocidad de giro variable. Factor de capacidad de un aerogenerador

La potencia nominal de un aerogenerador tripala de eje horizontal, que dispone de un sistema de control de potencia activo basado en el aumento del ángulo de paso, es $\dot{W}_{e,n} = 1500$ kW. El tren de potencia del aerogenerador incorpora un multiplicador planetario de engranajes rectos, con una relación de transmisión de 1 : 104, y un generador asíncrono doblemente alimentado que permite variar la velocidad de giro del eje entre los valores de 1000 y 1800 rpm. En la tabla adjunta se muestran los valores de la potencia eléctrica generada, $\dot{W}_e$, y del rendimiento total del aerogenerador, η_t, en función de la velocidad del viento, v.[4]

v (m s^{-1})	$\dot{W}_e$ (kW)	η_t
3	0	0
4	44	0,241
5	131	0,367
6	244	0,396
7	400	0,409
8	600	0,411
9	854	0,411
10	1111	0,389
11	1331	0,351
12	1475	0,299
13	1500	0,239
14	1500	0,192
15	1500	0,156
16	1500	0,128
17	1500	0,107
18	1500	0,090
19	1500	0,077
20	1500	0,066
21	1500	0,057
22	1500	0,049
23	1500	0,043
24	1500	0,038
25	1500	0,034

El aerogenerador comienza a funcionar cuando la velocidad del viento supera los 3 m s^{-1}, girando el eje de alta velocidad con la velocidad más baja que permite el generador eléctrico. Esta velocidad se mantiene constante hasta que el viento alcanza los 5 m s^{-1}. Para velocidades mayores del viento, la velocidad de giro del generador eléctrico aumenta con la velocidad del viento de forma que se obtiene un coeficiente de potencia máximo. Para una velocidad del viento de 10 m s^{-1} se alcanza la velocidad máxima de giro, y a partir de esta velocidad del viento el rotor gira a velocidad constante.

El aerogenerador se va a instalar en un emplazamiento en el que la curva de duración de velocidad (función de distribución de probabilidad) se ajusta a una curva de Weibull:

$$P(v > v_0) = \exp[-(v_0/c)^k],$$

con un factor de escala $c = 7{,}5$ m s^{-1} y un factor de forma $k = 2$. Se supondrá que la densidad del aire es $\rho = 1{,}22$ kg m^{-3}. Determinar:

a) Diámetro aproximado del rotor.

b) Rango de velocidades de giro del rotor y valor máximo de la velocidad de punta de pala.

c) Máxima potencia que puede alcanzarse en el eje de baja velocidad. Supónganse unos rendimientos del multiplicador y del generador eléctrico $\eta_{\text{mul}} = 0{,}97$ y $\eta_e = 0{,}98$, respectivamente.

d) Función de densidad de probabilidad de la velocidad del viento, $f(v)$.

e) Velocidad media del viento en el emplazamiento.

f) Energía que puede producir el aerogenerador en un periodo de un año. Supóngase un factor de utilización del 98 %.[5] Se recomienda calcular el área bajo la curva $\dot{W}_e(v)f(v)$ mediante la regla del trapecio:

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{[\dot{W}_e(v)f(v)]_{i+1} + [\dot{W}_e(v)f(v)]_i}{2} (v_{i+1} - v_i),$$

siendo N el número de puntos de la curva.

g) Factor de capacidad.[6]

Nota: $\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Solución

a) Tomando de la tabla los valores correspondientes, por ejemplo, a $v = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, se obtiene un valor del área barrida por el rotor

$$A = \frac{2\dot{W}_e}{\eta_t \rho v^3} = \frac{(2)(44\,000)}{(0{,}241)(1{,}22)(4)^3} \approx 4680\ \mathrm{m^2},$$

que corresponde a un diámetro aproximado

$$\boxed{D = 77\ \mathrm{m}.}$$

b) El rango de velocidades de giro de la aeroturbina es el comprendido entre

$$\boxed{n_{\mathrm{mín}} = 9{,}615}$$

y

$$\boxed{n_{\mathrm{máx}} = 17{,}31\ \mathrm{rpm}.}$$

Es inmediato deducir el valor máximo de la velocidad de punta de pala que puede alcanzarse durante el funcionamiento de la aeroturbina:

$$\boxed{u_{p,\mathrm{máx}} = 69{,}87\ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

c) La máxima potencia en el eje de la aeroturbina se deduce a partir del valor máximo de la potencia eléctrica generada que se deduce de la tabla incluida en el enunciado:

$$\boxed{\dot{W}_{t,\mathrm{máx}} = \frac{1}{\eta_e \eta_{\mathrm{mul}}} 1500 = 1578\ \mathrm{kW}.}$$

[4] El rendimiento total del aerogenerador es igual al producto del coeficiente de potencia de la aeroturbina, el rendimiento del multiplicador (o rendimiento orgánico, según se indica en la nota 2 al pie de la pág. 154) y el rendimiento del generador eléctrico, $\eta_t = C_p \eta_{\mathrm{mul}} \eta_e$. Obsérvese que en los tres anteriores capítulos el rendimiento total correspondía exclusivamente a la turbina hidráulica (excluyendo el generador eléctrico), y era análogo, por tanto, a lo que en el presente capítulo es el producto del coeficiente de potencia de la aeroturbina y el rendimiento orgánico.

[5] El factor de utilización es un parámetro que tiene en cuenta la influencia de la disponibilidad de la red y la disponibilidad técnica del aerogenerador en la energía generada, y se define como el cociente entre la energía generada en un determinado periodo de tiempo (generalmente un año) y la que se habría producido en el mismo periodo si la red y el aerogenerador hubiesen estado disponibles en condiciones normales de funcionamiento durante todo el periodo. Actualmente se alcanzan factores de utilización superiores al 95 %.

[6] El factor de capacidad se define como el cociente entre la energía producida por un aerogenerador en un determinado emplazamiento durante un periodo de tiempo determinado (generalmente un año) y la máxima que podría producir si estuviese funcionando a la potencia nominal durante el mismo periodo. El factor de capacidad puede definirse para un único aerogenerador o para un parque eólico en su conjunto. Debe tenerse en cuenta que existe cierta disparidad entre distintas fuentes en los términos con los que se denominan los diversos factores. En algunos textos, por ejemplo, al factor de capacidad se le denomina factor de utilización.

d) La función de densidad de probabilidad de la velocidad se obtiene derivando la función de distribución $F(v \leq v_0) = 1 - P(v > v_0)$:

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}F(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}\right]. \tag{6.6.1}$$

Sustituyendo los valores de $k = 2$ y $c = 7{,}5$ m s^{-1}, resulta

$$\boxed{f(v) = \frac{2}{7{,}5^2}\, v \exp\left[-\left(\frac{v}{7{,}5}\right)^{2}\right]}$$

(v en m s^{-1}).

e) La velocidad media del emplazamiento es

$$\overline{v} = \int_0^\infty v\, f(v)\, \mathrm{d}v = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \tag{6.6.2}$$

donde Γ es la función gamma.[7] Teniendo en cuenta la nota incluida en el enunciado y sustituyendo valores, resulta

$$\boxed{\overline{v} = \frac{7{,}5}{2}\sqrt{\pi} = 6{,}647 \text{ m s}^{-1}.}$$

f) Aplicando la regla del trapecio para 26 puntos (el primero correspondiente a $v = 0$ y el último, a $v = 25$ m s^{-1}) para resolver la integral

$$\overline{\dot{W}}_e = \int_0^{25} \dot{W}_e(v) f(v)\, \mathrm{d}v,$$

se obtiene una potencia media $\overline{\dot{W}}_e = 476{,}8$ kW. Multiplicando esta potencia media por el número de horas del año y por el factor de utilización, se obtiene la energía que se podría generar durante un año:

$$\boxed{E = 4093 \text{ MWh}.}$$

[7] Sustituyendo la ecuación (6.6.1) en el segundo miembro de la ecuación (6.6.2), resulta

$$\overline{v} = c\int_0^\infty \left(\frac{v}{c}\right)\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}\right] \mathrm{d}v.$$

Introduciendo en esta ecuación $x = (v/c)^k$ y $\mathrm{d}x = \frac{k}{c}(v/c)^{k-1}\,\mathrm{d}v$, y teniendo en cuenta que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x)\, \mathrm{d}x,$$

es inmediato comprobar que

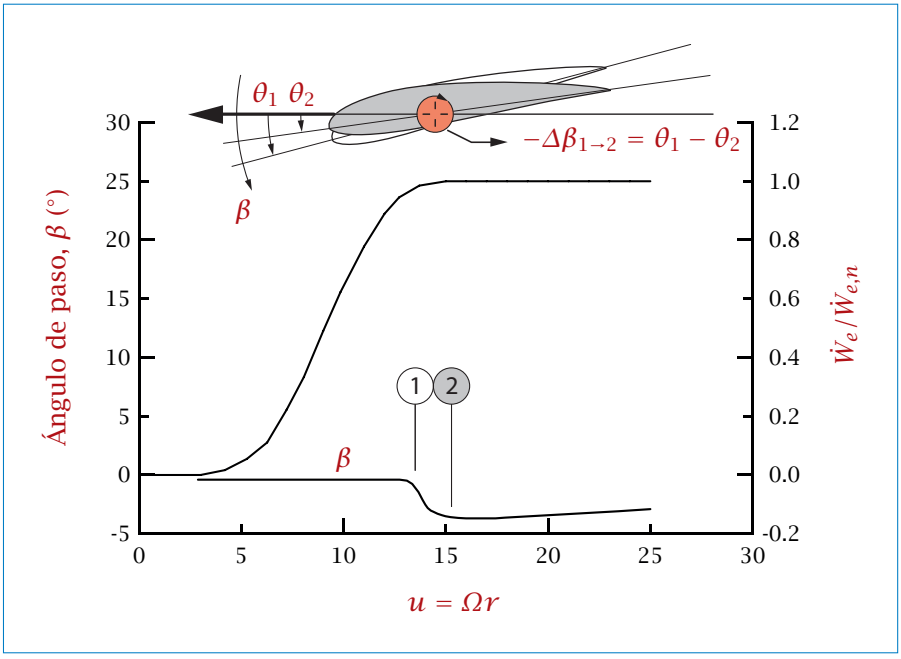
$$\overline{v} = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

g) El factor de capacidad del aerogenerador en el emplazamiento considerado es

$$F_C = \frac{E}{8760\,\dot{W}_{e,n}} = \frac{4093}{(8760)(1{,}500)} = 0{,}312.$$

Problema 6.7. Sistema de control de potencia

En la figura adjunta se representa la potencia eléctrica generada por la aeroturbina y el ángulo de paso de las palas en función de la velocidad del viento para un aerogenerador de eje horizontal. Describir el tipo de control de potencia que utiliza el aerogenerador y compararlo con otros posibles sistemas de control de potencia, tanto activos como pasivos.



Solución

El sistema de control de potencia al que corresponde la figura está basado en conseguir la entrada en pérdida del perfil mediante la reducción del ángulo de paso de las palas. El efecto que limita la potencia es el mismo que se produce un sistema pasivo (con ángulo de paso fijo) de control de potencia por entrada en pérdida, aunque en este caso la entrada en pérdida se consigue haciendo uso de un mecanismo que reduce el ángulo de paso de la pala cuando se alcanza la potencia nominal.

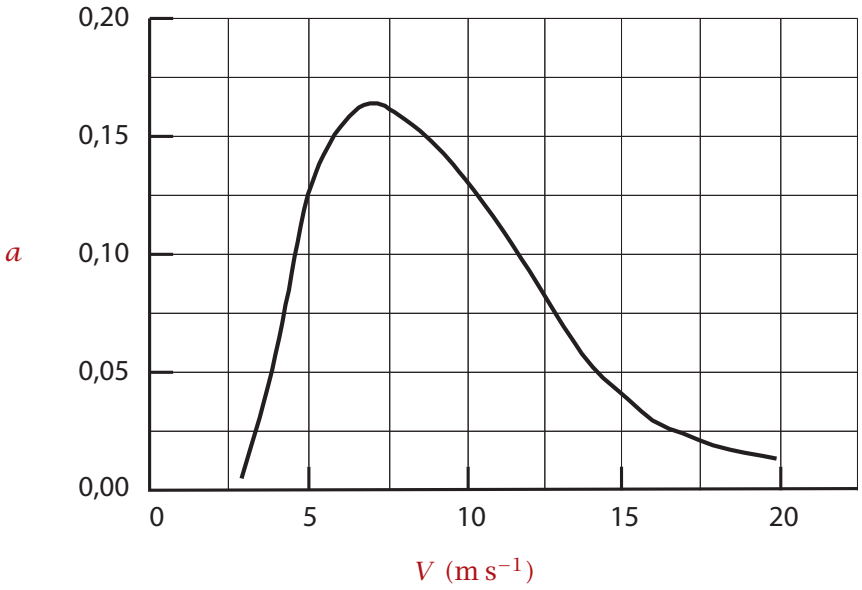
El sistema activo de limitación de potencia es más preciso que el sistema pasivo, ya que permite, para velocidades del viento por encima de la nominal, mantener una potencia sensiblemente constante e igual a la nominal, lo que hace que se genere una mayor potencia que en el caso de utilizar un sistema pasivo. El principal inconveniente que presenta el sistema activo de control de potencia es la complejidad del mecanismo de variación del ángulo de paso de la pala, que lo hace más costoso y menos fiable que el de paso fijo. Por otra parte, la variación del ángulo de paso en el sistema activo no solo permite limitar la potencia para velocidades del viento elevadas, sino también conseguir un mejor control de la potencia en el arranque de la aeroturbina, aumentando el par si la velocidad del viento es pequeña y limitándolo si la velocidad del viento es alta, de forma que el aumento del grado de carga durante la conexión se haga de forma progresiva. También permite la utilización de las palas como freno aerodinámico, girándolas 90° y colocándolas en posición de bandera, de forma que el aire ejerza un par nulo sobre ellas y, a la vez, se opongan al movimiento de rotación. En algunas turbinas, el sistema de cambio de paso permite además conseguir una mayor potencia en el funcionamiento a carga parcial.

La diferencia del sistema de control de potencia descrito en este ejercicio con respecto al basado en un aumento del ángulo de paso de las palas es obvia. En este último, el aumento progresivo del ángulo de paso a medida que aumenta la velocidad del viento por encima de la velocidad nominal da lugar a una reducción del ángulo de ataque a lo largo de la pala, lo que origina una menor fuerza de sustentación sobre esta y permite mantener constante e igual al valor nominal la potencia eléctrica. Las variaciones del ángulo de paso necesarias para mantener la potencia constante en un sistema basado en la reducción de dicho ángulo son mucho menores que las que se requieren en un sistema basado en el aumento de este mismo ángulo, lo que hace que la limitación de potencia sea más efectiva en el primero. Esto es debido a que la variación del coeficiente de sustentación que se consigue con la entrada en pérdida de la pala es mucho más brusca. Por otra parte, el giro de la pala para modificar el ángulo paso debe realizarse a una velocidad relativamente baja para evitar la aparición de cargas sobre la pala. Esto hace que

el sistema basado en la reducción del ángulo de paso responda más rápidamente que el basado en un aumento del mismo ángulo, dado que el ángulo que tienen que girar las palas para conseguir una reducción de la potencia es mucho menor en el primero. Esto tiene especial importancia en el caso de ráfagas. De hecho, el sistema de aumento de paso es adecuado para máquinas con velocidad de giro variable, que permiten absorber más eficazmente las cargas.

Problema 6.8. Interferencia entre dos aeroturbinas

En un parque eólico se han instalado varios aerogeneradores con rotores de distintos diámetros y cuya curva del coeficiente de velocidad inducida axial, a, en función de la velocidad del viento incidente sin perturbar, V, que aparece representada en la figura adjunta, se supondrá que es común a todos ellos.



En un determinado momento, la velocidad del viento incidente sobre uno

de los aerogeneradores (aerogenerador G), de diámetro $D = 60$ m y altura del buje $H = 50$ m, es $v_0 = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ (velocidad suficientemente aguas arriba de la aeroturbina, sin perturbar por esta). Un aerogenerador G′, de diámetro $D' = 30$ m y altura del buje $H' = 50$ m, se halla alineado con G en la dirección del viento, inmerso en la estela de este y en una posición en la que el aire ya ha recuperado la presión ambiente. El flujo alrededor de G′ se considera que es el que existiría si el aerogenerador estuviese aislado pero sometido a una velocidad del viento incidente sin perturbar $v_0' = 1{,}2\, v_3$, siendo v_3 la velocidad del aire aguas abajo de G que el modelo del disco actuador predice para la sección final de la zona de expansión (es decir, la sección en la que se ha recuperado la presión ambiente). Se aplicará la teoría del disco actuador sin estela giratoria, suponiendo que las propiedades son uniformes en cada una de las secciones de los tubos de corriente de ambas aeroturbinas que se utilizarán como volúmenes de control (véase la figura del Problema 6.3). Se tomará una densidad del aire $\rho = 1{,}225\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Determinar:

a) Velocidades del aire en los planos del rotor de cada aeroturbina, v_1 y v_1', y en las secciones finales de las zonas de expansión del flujo aguas abajo de las aeroturbinas, en las que se supone recuperada la presión ambiente, v_3 y v_3'.

b) Relaciones A_0/A_3 y A_0'/A_3' entre las áreas de las secciones del tubo de corriente de cada aeroturbina situadas aguas arriba (sección 0) y aguas abajo (sección 3), y a la distancia más próxima de esta, en las que puede suponerse que la presión es la atmosférica.

c) Potencia mecánica en el eje y coeficiente de potencia en cada aeroturbina. Determinar la reducción de potencia del aerogenerador G debida al efecto de la estela del aerogenerador G′.

d) Potencia mecánica que hipotéticamente existiría en el eje de cada una de las aeroturbinas suponiendo para ambas un coeficiente de potencia igual al correspondiente al límite de Betz.

Se sugiere dibujar esquemáticamente y de forma cualitativa los tubos de corriente correspondientes a las dos aeroturbinas, teniendo en cuenta los valores relativos de las áreas de las distintas secciones e indicando los valores de la velocidad del aire en cada una de estas. Discutir las limitaciones de las hipótesis consideradas.

Solución

a) El coeficiente de velocidad inducida axial se define como

$$a = 1 - v_r/V,$$

siendo v_r la velocidad del aire en el plano del rotor y V la velocidad del viento incidente sin perturbar. De la figura del enunciado, para $V = v_0 = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ se obtiene aproximadamente $a_G = 0{,}13$, por lo que

$$\boxed{v_1 = v_r = v_0(1 - a_G) = 8{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

y, de acuerdo con la ecuación (6.3.5), obtenida en el Apartado d) del Problema 6.3,

$$\boxed{v_3 = v_0(1 - 2a_G) = 7{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

En el aerogenerador G′, $V = v_0' = 1{,}2\,v_3 = 8{,}880\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, valor para el que se obtiene de la figura un valor aproximado de $a_{G'} \approx 0{,}147$, con el que resulta

$$\boxed{v_1' = v_0'(1 - a_{G'}) = 7{,}57\ \mathrm{m\,s^{-1}},}$$

$$\boxed{v_3' = v_0'(1 - 2a_{G'}) = 6{,}27\ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

b) De la aplicación de la ecuación de conservación de la masa al volumen de control correspondiente a cada una de las dos aeroturbinas, se obtiene

$$\boxed{\frac{A_0}{A_3} = \frac{v_3}{v_0} = 1 - 2a_G = 0{,}74,}$$

$$\boxed{\frac{A_0'}{A_3'} = \frac{v_3'}{v_0'} = 1 - 2a_{G'} = 0{,}71.}$$

c) Aplicando la ecuación (A.3.3) de conservación de la energía mecánica al volumen de control de una aeroturbina que tiene un rotor que barre una superficie de área A y está sometida a un viento medio incidente de velocidad V, despreciando las pérdidas de energía, resulta[8]

$$\dot{W}_t = \rho A v_r[V^2/2 - V^2(1 - 2a)^2/2] = 2\rho A V^3 a(1 - a)^2.$$

[8] Obsérvese que la potencia puede obtenerse también mediante $\dot{W}_t = \rho A v_1 E$, siendo E la fuerza de empuje obtenida en el Apartado e) del Problema 6.3.

El coeficiente de potencia es, por tanto,

$$C_p = \frac{\dot{W}_t}{\frac{1}{2}\rho A V^3} = 4a(1-a)^2. \tag{6.8.1}$$

De las ecuaciones anteriores, se obtienen los siguientes valores de la potencia en el eje y el coeficiente de potencia del aerogenerador G:

$$\boxed{\dot{W}_{t,G} = 2\rho \frac{\pi D^2}{4} v_0^3 a_G (1-a_G)^2 = 682 \text{ kW},}$$

$$\boxed{C_{p,G} = 4a_G(1-a_G)^2 = 0{,}39,}$$

y del aerogenerador G′:

$$\boxed{\dot{W}_{t,G'} = 2\rho \frac{\pi D'^2}{4} v_0'^3 a_{G'} (1-a_{G'})^2 = 130 \text{ kW},}$$

$$\boxed{C_{p,G'} = 4a_{G'}(1-a_{G'})^2 = 0{,}43.}$$

La potencia que produciría el aerogenerador G′ si no estuviese afectado por la estela del aerogenerador G sería

$$\dot{W}_{t,G',\text{aislado}} = 2\rho \frac{\pi D'^2}{4} v_0^3 a_G (1-a_G)^2 = 170 \text{ kW},$$

con lo que se deduce que el efecto de la estela del aerogenerador G produce una reducción de potencia

$$\boxed{\Delta\dot{W}_{t,G'} = \frac{\dot{W}_{t,G',\text{aislado}} - \dot{W}_{t,G'}}{\dot{W}_{t,G',\text{aislado}}} \times 100 = 24\,\%}$$

en el aerogenerador G′.

d) El límite de Betz para el coeficiente de potencia es el valor máximo de la función de la ecuación (6.8.1), $C_{p,\text{máx}} = 16/27$, que se alcanza para $a = 1/3$. Para dicho valor, resulta

$$\boxed{\dot{W}_{t,G,\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{16}{27}\rho \frac{\pi D^2}{4} v_0^3 = 1026 \text{ kW},}$$

$$\boxed{\dot{W}_{t,G',\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{16}{27}\rho \frac{\pi D'^2}{4} v_0'^3 = 179{,}7 \text{ kW}.}$$

Bibliografía

Brennen, C.E., *Hydrodynamics of pumps*, Oxford University Press, 1994.

Burton, T.; Sharpe, D.; Jenkins, N.; Bossanyi, E., *Wind energy handbook*, John Wiley & Sons, 2001.

Cherkasski, V.M., *Bombas, ventiladores y compresores*, Mir, 1986.

Comolet, R., *Mécanique expérimentale des fluides*, tomo II (Dynamique des fluides réels, turbomachines), 4.ª ed., Masson, 1994.

Crespo, A., *Mecánica de fluidos*, Thomson, 2006.

Daugherty, R.L.; Franzini, J.B.; Finnemore, E.J., *Fluid mechanics with engineering applications*, McGraw-Hill, 1989.

Douglas, J.F.; Matthews, R.D., *Solving problems in fluid mechanics*, vol. 2, 3.ª ed., Longman, 1996.

Fox, R.W.; McDonald, A.T., *Introducción a la mecánica de fluidos*, 2.ª ed., McGraw-Hill, 1995.

Freris, L.L., *Wind energy conversion systems*, Prentice Hall, 1989.

Harrison, R.; Hau, E.; Snel, H., *Large wind turbines. Design and economics*, John Wiley & Sons, 2000.

Hau, E.; *Wind turbines: fundamentals, technologies, application and economics*, Springer Verlag, 2000.

Hernández Krahe, J.M., *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*, UU. DD. 5.ª y 6.ª, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1976.

Horlock, J.H., *Axial flow turbines*, Butterworths, 1966.

Karassik, I.K.; Krutzsch, W.C.; Fraser, W.H.; Messina, J.P. (eds.), *Manual de bombas*, McGraw-Hill, 1983.

Kováts, A.; Desmur, G., *Pompes, ventilateurs, compresseurs, centrifuges et axiaux*, Dunod, 1962.

Logan , E., *Turbomachinery: basic theory and applications*, 2.ª ed, Marcel Dekker, 1993.

Massey, B.S., *Mechanics of fluids*, 6.ª ed., Van Nostrand Reinhold, 1989.

Mataix, C., *Turbomáquinas hidráulicas*, Editorial ICAI, 1975.

Mott, R.L., *Applied fluid mechanics*, 5.ª ed., Prentice-Hall, 2000.

Nekrasov, B., *Hidráulica*, Mir, 1968.

Pfleiderer, C., *Bombas centrífugas y turbocompresores*, Labor, 1960.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., *Mechanics of fluids*, Prentice-Hall, 1991.

Rodríguez Amenedo, J.L.; Burgos Díaz, J.C.; Arnalte Gómez, S. (eds.), *Sistemas eólicos de producción de energía eléctrica*, Editorial Rueda, 2003.

Round, G.F.; Garg, V.K., *Applications of fluid dynamics*, Edward Arnold, 1986.

Sabersky, R.H.; Acosta, A.J.; Hauptmann, E.G.; Gates, E.M., *Fluid flow. A first course in fluid mechanics*, 4.ª ed., Prentice-Hall, 1999.

Sédille, M., *Turbo-machines hydrauliques et thermiques*, tomo II, Masson, 1967.

Shames, I.H., *Mecánica de fluidos*, 3.ª ed., McGraw-Hill, 1995.

Sharpe, G.J., *Solving problems in fluid dynamics*, Longman, 1994.

Smits, A.J., *A physical introduction to fluid mechanics*, John Wiley & Sons, 2000.

Spera, D.A., *Wind turbine technology: fundamental concepts of wind turbine engineering*, American Society of Mechanical Engineers, 1994.

Stepanoff, A.J., *Centrifugal and axial flow pumps*, 2.ª ed., John Wiley & Sons, 1957.

White, F.M., *Mecánica de fluidos*, 6.ª ed., McGraw-Hill, 2008.

Wislicenus, G.F., *Fluid mechanics of turbomachinery*, Dover, 1965.

Wizelius, T., *Developing wind power projects: theory and practice*, Earthscan Publications Ltd., 2007.

Apéndices

Apéndice A

Relación de ecuaciones

En este apéndice se presentan algunas ecuaciones a las que se hace referencia en los ejercicios. Téngase en cuenta que se trata tan solo de una mera relación, no exhaustiva, de ecuaciones, y que no se han incluido explicaciones detalladas sobre su deducción, condiciones de validez, etc. La notación utilizada se corresponde con la que aparece en la sección de nomenclatura.

A.1. Ecuaciones de conservación en forma integral

A.1.1. Ecuación de conservación de la masa

Expresa que la masa de un volumen fluido (sistema material) $V_f(t)$ permanece constante en el tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_f(t)} \rho \,\mathrm{d}V = 0. \tag{A.1.1}$$

Referida a un volumen de control variable en el tiempo, $V_c(t)$, que en el instante considerado coincide con el volumen fluido, y cuya superficie S_c se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}_c$, puede escribirse de la forma

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)} \rho \,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_c)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} = 0. \tag{A.1.2}$$

El término [1] expresa la variación en el tiempo de la masa contenida en el volumen de control $V_c(t)$ y el término [2] el flujo de masa saliente a través de S_c. Si el

volumen de control es fijo ($\boldsymbol{v}_c = 0$),

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}_{[2]} = 0. \tag{A.1.3}$$

A.1.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Expresa que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento asociada a un volumen fluido es igual a la resultante de las fuerzas de superficie y de volumen que actúan sobre él:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_f(t)} \rho \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_v. \tag{A.1.4}$$

Utilizando un volumen de control variable en el tiempo $V_c(t)$, cuya superficie S_c se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}_c$, e introduciendo

$$\boldsymbol{F}_s = \int_{S_c} \boldsymbol{f}_s\, \mathrm{d}S = \int_{S_c} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S, \tag{A.1.5}$$

$$\boldsymbol{F}_v = \int_{V_c} \boldsymbol{f}_v\, \mathrm{d}V = \int_{V_c} \rho \boldsymbol{f}_m\, \mathrm{d}V, \tag{A.1.6}$$

resulta

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_c(t)} \rho \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_c) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \boldsymbol{f}_m\, \mathrm{d}V}_{[4]}, \tag{A.1.7}$$

donde el término [1] expresa la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento del fluido contenido en el volumen de control $V_c(t)$; el término [2] es el flujo convectivo de cantidad de movimiento saliente a través de S_c; [3] es la resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen fluido a través de S_c, y [4] es la resultante de las fuerzas de volumen que se ejercen sobre el volumen fluido. Si el volumen de control es fijo,

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})}{\partial t}\, \mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \boldsymbol{f}_m\, \mathrm{d}V}_{[4]}. \tag{A.1.8}$$

El tensor de tensiones $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ puede descomponerse haciendo

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}' - p\boldsymbol{I}, \tag{A.1.9}$$

siendo p la presión, $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}'$ el tensor de tensiones viscosas e $\boldsymbol{I}$ el tensor identidad.

Las fuerzas de volumen más frecuentes son las debidas a la gravedad, $\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{g}$, y al movimiento no uniforme del sistema de referencia,

$$\boldsymbol{f}_m = -\boldsymbol{a} - (\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t) \times \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}, \tag{A.1.10}$$

siendo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{\Omega}$, respectivamente, la aceleración uniforme y la velocidad angular del sistema de referencia, y $\boldsymbol{x}$, el vector de posición.

A partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento puede deducirse la siguiente ecuación de *conservación del momento cinético*:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_f(t)} \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)} \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_c) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} \\ &= \underbrace{\int_{S_c} \boldsymbol{x} \times (\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{f}_m\,\mathrm{d}V}_{[4]},\end{aligned} \tag{A.1.11}$$

donde el término [1] representa la variación en el tiempo del momento cinético en el volumen de control; [2] es el flujo convectivo saliente de momento cinético a través de la superficie del volumen de control; [3] es el momento resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre el fluido a través de la superficie del volumen de control, y [4] es el momento resultante de las fuerzas de volumen que actúan sobre el fluido que ocupa el volumen de control. En definitiva, la ecuación (A.1.11) expresa que la variación en el tiempo del momento cinético de un volumen fluido es igual al momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él.

A.1.3. Ecuación de conservación de la energía

Expresa que la variación en el tiempo de la *energía total (interna+cinética)* de un volumen fluido es igual a la suma del trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el volumen fluido por las fuerzas de superficie y de volumen, y el calor comunicado al volumen fluido por unidad de tiempo. Utilizando un volumen de control variable en el tiempo $V_c(t)$, cuya superficie S_c se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}_c$, puede escribirse:

$$\begin{aligned}&\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)} \rho\left(e + \tfrac{1}{2}v^2\right)\,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho\left(e + \tfrac{1}{2}v^2\right)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_c) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} \\ &= \underbrace{\int_{V_c} \rho \boldsymbol{f}_m \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c} (\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S}_{[4]} + \underbrace{\int_{S_c} (-\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[5]} + \underbrace{\int_{V_c} \dot{Q}_{r,q}\,\mathrm{d}V}_{[6]}.\end{aligned} \tag{A.1.12}$$

El término [1] representa la variación en el tiempo de la energía total en el volumen de control; [2] es el flujo convectivo de energía total que sale a través de la superficie del volumen de control; [3] es la potencia de las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido contenido en el volumen de control; [4] es la potencia de las fuerzas de presión y viscosas que se ejercen sobre el fluido a través de la superficie de control; [5] es el flujo de calor por conducción que se comunica al fluido a través de la superficie de control ($\boldsymbol{q}$ tiene sentido saliente), y [6] el calor comunicado por unidad de tiempo al fluido que ocupa el volumen de control por radiación y reacción química.

Si se supone que las fuerzas másicas derivan de una función potencial, U, independiente del tiempo, la ecuación anterior puede expresarse de la forma

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)} \rho\left(e+\tfrac{1}{2}v^2+U\right)\,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho\left(e+\tfrac{1}{2}v^2+U\right)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_c)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c}(\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c}(-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[4]} + \underbrace{\int_{V_c}\dot{Q}_{r,q}\,\mathrm{d}V}_{[5]}. \quad \text{(A.1.13)}$$

La ecuación (A.1.13) expresa que la variación en el tiempo de la suma de la *energía total (interna+cinética)* y la *energía potencial* de un volumen fluido se debe al trabajo por unidad de tiempo de las *fuerzas de superf cie* que actúan sobre el volumen fluido y al calor comunicado al volumen fluido por unidad de tiempo.

Para *f uidos incompresibles*, la ecuación de conservación de la *energía interna* de un volumen fluido, referida a un volumen de control variable en el tiempo, puede expresarse de la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_f(t)}\rho e\,\mathrm{d}V = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)}\rho e\,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c}\rho e(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_c)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} = \underbrace{\int_{V_c}\Phi_v\,\mathrm{d}V}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c}(-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[4]} + \underbrace{\int_{V_c}\dot{Q}_{r,q}\,\mathrm{d}V}_{[5]}. \quad \text{(A.1.14)}$$

Restando las ecuaciones (A.1.13) y (A.1.14) se obtiene la ecuación de conservación de la *energía mecánica* para un volumen fluido, referida a un volumen de

control variable en el tiempo, válida para *f uidos incompresibles*,

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_c(t)} \rho\left(\tfrac{1}{2}v^2+U\right)\,\mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho\left(\tfrac{1}{2}v^2+U\right)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_c)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c}(\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S}_{[3]} - \underbrace{\int_{V_c}\Phi_v\,\mathrm{d}V}_{[4]}. \quad \text{(A.1.15)}$$

En varios problemas se hace uso de la siguiente forma simplificada de la ecuación (A.1.15) de conservación de la *energía mecánica*:

$$\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}v^2+U\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}v^2+U\right)_2 = gH_\varphi + g\Delta H, \quad \text{(A.1.16)}$$

$$\Delta H = \begin{cases} -H_m & \text{en bombas,} \\ H_n & \text{en turbinas.} \end{cases}$$

Corresponde a un flujo estacionario en un sistema con secciones de entrada (1) y salida (2) únicas (en las que las magnitudes fluidas pueden suponerse uniformes[1]), en el que se produce una pérdida de altura H_φ por efectos de viscosidad, y que puede contener una máquina hidráulica que incremente (en el caso de bombas) o disminuya (en el caso de turbinas) la altura total del fluido que circula a través de ella.[2] El flujo obviamente debe ser incompresible. La altura H_φ es

$$H_\varphi = \frac{\overline{\Phi}_v}{g\rho G}, \quad \text{(A.1.17)}$$

siendo $\overline{\Phi}_v$ el término [4] de la ecuación (A.1.15).

También en flujos estacionarios e incompresibles a través de sistemas con secciones de entrada (1) y salida (2) únicas (en las que las propiedades se suponen uniformes), la ecuación (A.1.14) de conservación de la *energía interna* en forma

[1] Para tener en cuenta la no uniformidad de las magnitudes fluidas en las secciones 1 y 2 podrían utilizarse valores medios en cada sección en el primer miembro de la ecuación (A.1.16) e introducir una corrección que tenga en cuenta el efecto de la no uniformidad en el cálculo de las integrales de la ecuación (A.1.15).

[2] En el Apéndice A.3.2 se definen los conceptos de altura manométrica, H_m, y salto neto, H_n, en bombas y turbinas hidráulicas. Téngase en cuenta que cuando la ecuación (A.1.16), tal como se ha escrito, se aplica a una instalación en la que existe una máquina, H_φ no incluye las pérdidas en el interior de la máquina. El balance de energía en el interior de la máquina se expresa mediante la ecuación (A.3.3). En realidad, la ecuación (A.3.3) se deduce de la ecuación (A.1.16) haciendo $H_\varphi = 0$.

integral puede expresarse de la forma siguiente:

$$e_2 - e_1 = \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q} + \frac{\dot{\overline{Q}}}{\rho Q}, \tag{A.1.18}$$

siendo $\dot{\overline{Q}}$ la suma de los términos [4] y [5] de la ecuación (A.1.14).

A.2. Flujos turbulentos

A.2.1. Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías

Entre dos secciones, denotadas con subíndices 1 y 2, situadas a lo largo de una tubería (la sección 2 aguas abajo de la sección 1) por la que circula un fluido incompresible en condiciones estacionarias, suponiendo que la tubería es de sección gradualmente variable y tiene un radio de curvatura de su línea media grande frente al radio hidráulico, la disminución de energía mecánica específica viene dada por (ver ecuación (A.1.16))

$$\left(\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_2 = gH_\varphi, \tag{A.2.1}$$

donde v es la velocidad media en una sección y

$$H_\varphi = \int_1^2 \frac{f v^2}{8 g r_h}\,\mathrm{d}l + \sum K\,\frac{v^2}{2g} \tag{A.2.2}$$

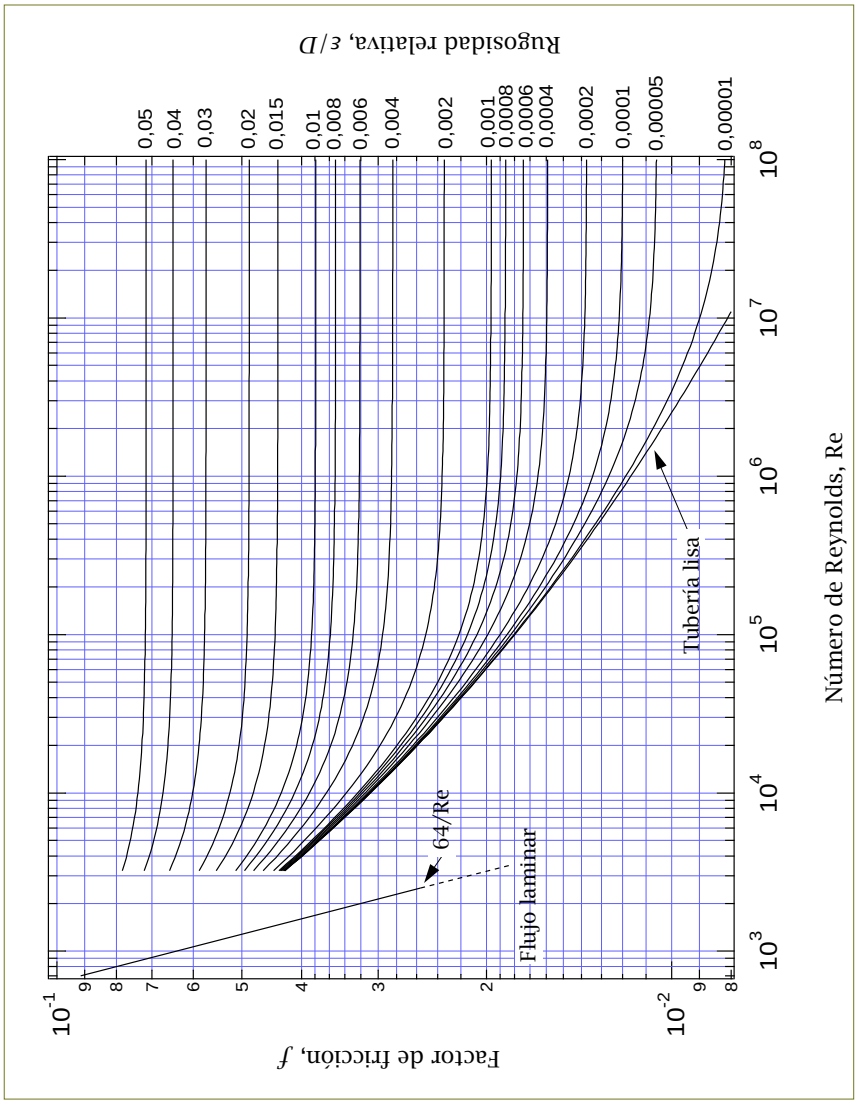
es la suma de la altura de pérdidas debidas a la fricción y las alturas de pérdidas locales,[3] siendo f el factor de fricción.[4] Si la tubería es de sección circular ($r_h = D/4$) constante,

$$H_\varphi = f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} + \sum K\,\frac{v^2}{2g}. \tag{A.2.3}$$

[3] En los elementos en los que se producen las pérdidas de carga locales pueden existir cambios bruscos de sección en el conducto. Entre dichos elementos se incluyen los estrechamientos y ensanchamientos correspondientes a las secciones de conexión de una tubería con un depósito.

[4] Existe cierta confusión en la literatura sobre la denominación del factor de fricción f. El factor de fricción f de la ecuación (A.2.2) es igual a cuatro veces el denominado coeficiente de fricción, C_f ($f = 4C_f = 4\sigma_p/(\frac{1}{2}\rho v^2)$, siendo σ_p la tensión cortante en la pared). En algunos textos se utiliza λ para denotar el factor de fricción f. En ocasiones, se denomina a f coeficiente de fricción, en lugar de factor de fricción, e incluso en algunos textos se denomina factor de fricción a lo que aquí se ha definido como coeficiente de fricción (es menos equívoco denominar a C_f factor de fricción de Fanning, como se hace en alguna ocasión). Generalmente, en el diagrama de Moody se representa el factor de fricción f (aunque se le denomine coeficiente de fricción), si bien en ocasiones, aunque infrecuentes, se representa $f/4$ en lugar de f. Las denominaciones que se utilizan aquí son generalmente las más extendidas.

A.2.2. Diagrama de Moody



A.3. Máquinas de fluidos

A.3.1. Ecuación de conservación de la energía

Para *máquinas de f uidos*, suponiendo que en las secciones de entrada y salida de la máquina las propiedades son uniformes y los efectos de viscosidad despreciables, y que la masa y la energía en el volumen de control considerado no varían en el tiempo, de la aplicación de la ecuación (A.1.13) se obtiene

$$\left(h + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_s - \left(h + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_e = \frac{\dot{\overline{W}}}{\rho Q} + \frac{\dot{\overline{Q}}}{\rho Q}. \tag{A.3.1}$$

El primer término del segundo miembro procede del término [3] de la ecuación (A.1.13). $\dot{\overline{W}}$ es la potencia mecánica intercambiada entre máquina y fluido.

En *máquinas hidráulicas*, la ecuación (A.1.14) de conservación de la *energía interna* en forma integral (suponiendo propiedades uniformes en las secciones de entrada y salida de la máquina) puede expresarse de la forma siguiente:

$$e_s - e_e = \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q} + \frac{\dot{\overline{Q}}}{\rho Q}. \tag{A.3.2}$$

(Obsérvese que esta ecuación coincide con la ecuación (A.1.18).)

Restando las ecuaciones (A.3.1) y (A.3.2) se obtiene la ecuación de conservación de la *energía mecánica* en máquinas hidráulicas:[5]

$$\left(\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_s - \left(\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right)_e = \frac{\dot{\overline{W}}}{\rho Q} - \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q}. \tag{A.3.3}$$

Esta ecuación, que lógicamente también puede aplicarse a elementos de máquinas (rodetes, distribuidores, difusores, etc.), coincide con la ecuación (A.1.16).

A.3.2. Definición de alturas y rendimientos

A.3.2.1. Bombas hidráulicas

En bombas hidráulicas,

$$\left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_e^s > 0.$$

[5] Esta ecuación también puede obtenerse directamente a partir de la ecuación (A.1.15), y es un caso particular de la ecuación (A.1.16). En este caso, las secciones 1 y 2 de entrada y salida del volumen de control coinciden con las secciones de entrada y salida de la máquina, por lo que $H_\varphi = 0$; el segundo miembro es, por tanto, ΔH, y $\overline{\Phi}_v$ es la potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas en el interior de la máquina.

La energía específica que transmiten los álabes de la máquina al fluido,

$$\frac{\dot{\overline{W}}}{\rho Q} = \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_e^s + \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q}, \tag{A.3.4}$$

debe ser, por tanto, positiva; una parte se emplea en incrementar la energía mecánica específica del fluido entre las secciones de entrada y salida de la bomba y el resto se disipa debido a efectos de viscosidad.[6] Los tres términos de la ecuación (A.3.3) pueden expresarse en función de las "alturas" que se definen a continuación:

- *Altura manométrica* o altura efectiva de elevación,[7] H_m:

$$gH_m = \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_e^s. \tag{A.3.5}$$

- *Altura útil*[8] o altura teórica de elevación, H_u:

$$gH_u = \frac{\dot{\overline{W}}}{\rho Q}. \tag{A.3.6}$$

- *Altura de pérdidas internas*, H_L:

$$gH_L = \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q}. \tag{A.3.7}$$

[6] En una turbomáquina, la fricción en el fluido produce turbulencia, y parte de la energía cinética del flujo medio se transforma en energía cinética turbulenta, que finalmente se disipa en forma de energía térmica. Aunque se han supuesto distribuciones uniformes de propiedades en la sección de salida de la máquina, en realidad el fluido sale de esta con cierta energía cinética turbulenta que se disipará y transformará en energía térmica fuera de la máquina. En $\overline{\Phi}_v$ se supondrá incluida la contribución debida a dicha energía cinética turbulenta.

[7] Existe una gran disparidad en la denominación de las distintas alturas por diferentes autores. Algunos, por ejemplo, distinguen entre altura de elevación (en m de columna del líquido bombeado) y altura manométrica (en m de c.a.). Otros llaman a H_m altura efectiva, altura suministrada o incluso altura útil.

[8] Se le denomina también altura de Euler, por ser la altura definida por la ecuación de Euler (ecuación (A.3.41)). No suele ser frecuente esta denominación de altura útil; de hecho, como se ha indicado en la nota anterior, a veces incluso se llama altura útil a lo que aquí se designa como altura manométrica. Sin embargo, el significado físico de H_u es el mismo en bombas que en turbinas, para las que sí se emplea la denominación de altura o salto útil (aparentemente con más sentido que en bombas al ser la altura que "se aprovecha"), por lo que se juzga más acertado emplear la misma denominación para definir lo que tanto en bombas como en turbinas es la altura intercambiada entre rodete y fluido. Si se prefiere, no obstante, puede utilizarse la denominación de altura teórica de elevación.

La ecuación (A.3.3) puede entonces expresarse de la forma:

$$H_m = H_u - H_L. \tag{A.3.8}$$

A la magnitud

$$\overline{\dot{W}} = \dot{W}_u = \rho Q g H_u$$

se la denomina *potencia útil*[9] de la bomba.

A continuación se van a definir los rendimientos característicos de una bomba. Se supondrá que la bomba impulsa un caudal Q y que existe un caudal de fugas Q_f, de forma que entre los álabes del rodete circula un caudal $Q + Q_f$.

La potencia $\dot{W}_t$ que comunica el motor de accionamiento al eje de una bomba, denominada *potencia en el eje* o al freno, es igual a la suma de los siguientes términos:

- Potencia correspondiente a pérdidas mecánicas (también llamadas orgánicas) debidas a la fricción entre los distintos elementos de la bomba: $\dot{W}_o$.
- Potencia comunicada al fluido que se fuga: $\rho Q_f g(H_m + H_L)$.
- Potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas que se producen en el intercambio de energía entre el rodete y el fluido que se impulsa: $\overline{\Phi}_v = \rho Q g H_L$.
- Potencia utilizada para aumentar la energía mecánica del fluido que se impulsa entre las secciones de entrada y salida de la bomba: $\rho Q g H_m$.

Puede ponerse, por tanto,

$$\dot{W}_t = \dot{W}_o + \rho(Q + Q_f)g(H_m + H_L) = \dot{W}_o + \rho(Q + Q_f)gH_u = \dot{W}_o + \rho Q_f g H_u + \dot{W}_u. \tag{A.3.9}$$

El *rendimiento total* de la bomba se define por la expresión

$$\eta_t = \frac{\rho Q g H_m}{\dot{W}_t}, \tag{A.3.10}$$

que puede escribirse de la forma

$$\eta_t = \frac{\overbrace{\rho(Q + Q_f)g(H_m + H_L) + \dot{W}_o}^{\dot{W}_t} - \dot{W}_o}{\dot{W}_t} \frac{\rho Q g H_m}{\rho(Q + Q_f)g(H_m + H_L)}. \tag{A.3.11}$$

Utilizando las siguientes definiciones:

[9] De nuevo, con el adjetivo útil se hace referencia a potencia transmitida entre fluido y rodete.

- *Rendimiento manométrico*, η_m:

$$\eta_m = \frac{H_m}{H_u} = \frac{H_m}{H_m + H_L} \tag{A.3.12}$$

- *Rendimiento volumétrico*, η_v:

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + Q_f} \tag{A.3.13}$$

- *Rendimiento orgánico*, η_o:

$$\eta_o = \frac{\dot{W}_t - \dot{W}_o}{\dot{W}_t}, \tag{A.3.14}$$

la ecuación (A.3.11) puede ponerse de la forma

$$\eta_t = \eta_o \eta_v \eta_m. \tag{A.3.15}$$

La potencia en el eje puede expresarse entonces como

$$\dot{W}_t = \frac{1}{\eta_m \eta_v \eta_o} \rho Q g H_m, \tag{A.3.16}$$

y la potencia útil

$$\dot{W}_u = \frac{1}{\eta_m} \rho Q g H_m. \tag{A.3.17}$$

A.3.2.2. Turbinas hidráulicas

Se definen a continuación alturas y rendimientos utilizados en el estudio de turbinas hidráulicas, de forma análoga a como se ha hecho para bombas.[10] Ahora, la ecuación (A.3.3) se considerará aplicada entre las secciones de entrada y salida de una máquina hidráulica que funcione como turbina. En turbinas,

$$\left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 + U \right]_e^s < 0.$$

[10] Aunque la notación empleada es muy similar en bombas y turbinas, las definiciones de alturas y rendimientos (y la correspondiente denominación o notación en algunos casos), si bien corresponden a conceptos análogos, son obviamente diferentes para ambos tipos de máquinas. La altura manométrica, H_m, la altura útil, H_u, y el rendimiento manométrico, η_m, en bombas, se corresponden, respectivamente, con el salto neto, H_n, el salto útil, H_u, y el rendimiento hidráulico, η_h, en turbinas.

La energía específica que transmiten los álabes de la máquina al fluido debe ser, por tanto, negativa ($\overline{\dot{W}} < 0$). Una parte de la disminución de energía mecánica específica del fluido entre las secciones de entrada y salida de la turbina,

$$\left| \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 + U \right]_e^s \right| = \left| \frac{\overline{\dot{W}}}{\rho Q} \right| + \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q}, \tag{A.3.18}$$

se emplea en producir trabajo sobre el rodete y otra parte se disipa debido a efectos de viscosidad. Los tres términos de la ecuación (A.3.3) se expresan, en este caso, en función de las "alturas" que se definen a continuación:

- *Salto neto*, H_n:

$$gH_n = -\left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 + U \right]_e^s. \tag{A.3.19}$$

- *Salto útil*, H_u:

$$gH_u = -\frac{\overline{\dot{W}}}{\rho Q}. \tag{A.3.20}$$

- *Altura de pérdidas internas*, H_L:

$$gH_L = \frac{\overline{\Phi}_v}{\rho Q}. \tag{A.3.21}$$

La ecuación (A.3.3) puede entonces expresarse de la forma:

$$H_n = H_u + H_L. \tag{A.3.22}$$

A la magnitud

$$\overline{\dot{W}} = \dot{W}_u = -\rho Q g H_u$$

se la denomina *potencia útil* de la turbina.

A continuación se van a definir los rendimientos característicos de una turbina. Se supondrá que a la sección de entrada de la turbina llega un caudal Q y que existe un caudal de fugas Q_f, de forma que entre los álabes del rodete circula un caudal $Q - Q_f$.

La potencia que se pone a disposición de la turbina ($\rho Q g H_n$) es igual a la suma de los siguientes términos:

- Potencia que no se consigue extraer del fluido que se fuga: $\rho Q_f g H_n$.
- Potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas que se producen en el intercambio de energía entre el rodete y el fluido que circula entre los álabes: $\rho(Q - Q_f) g H_L$.

- Potencia correspondiente a pérdidas mecánicas debidas a la fricción entre los distintos elementos de la turbina: $\dot{W}_o$.
- Potencia comunicada al eje de la turbina, o *potencia en el eje* o al freno: $\dot{W}_t$.

Puede ponerse, por tanto,

$$\begin{aligned}\dot{W}_t &= \rho(Q-Q_f)g(H_n-H_L)-\dot{W}_o = \rho(Q-Q_f)gH_u-\dot{W}_o \\ &= |\dot{W}_u| - \rho Q_f g H_u - \dot{W}_o.\end{aligned} \tag{A.3.23}$$

El *rendimiento total* de la turbina se define por la expresión

$$\eta_t = \frac{\dot{W}_t}{\rho Q g H_n}, \tag{A.3.24}$$

que puede escribirse de la forma

$$\eta_t = \underbrace{\frac{\dot{W}_t}{\rho(Q-Q_f)g(H_n-H_L)}}_{\dot{W}_t+\dot{W}_o}\frac{\rho(Q-Q_f)g(H_n-H_L)}{\rho Q g H_n}. \tag{A.3.25}$$

Utilizando las siguientes definiciones:

- *Rendimiento hidráulico*, η_h:

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = \frac{H_n-H_L}{H_n} \tag{A.3.26}$$

- *Rendimiento volumétrico*, η_v:

$$\eta_v = \frac{Q-Q_f}{Q} \tag{A.3.27}$$

- *Rendimiento orgánico*, η_o:

$$\eta_o = \frac{\dot{W}_t}{\dot{W}_t+\dot{W}_o}, \tag{A.3.28}$$

la ecuación (A.3.25) puede ponerse de la forma

$$\eta_t = \eta_o\eta_v\eta_h. \tag{A.3.29}$$

La potencia en el eje puede expresarse entonces como

$$\dot{W}_t = \eta_h\eta_v\eta_o\rho Q g H_n, \tag{A.3.30}$$

y la potencia útil

$$\dot{W}_u = \eta_h\rho Q g H_n. \tag{A.3.31}$$

A.3.3. Pérdidas de energía en la instalación

Los puntos $e0$ y $s0$ representarán los límites físicos de la instalación considerada, y e y s, como anteriormente, los de la máquina. La variación de energía mecánica específica entre $e0$ y $s0$ puede expresarse de la forma siguiente:

$$E_{s0} - E_{e0} = \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_s^{s0} + \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_e^{s} + \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_{e0}^{e}. \quad \text{(A.3.32)}$$

La *altura de pérdidas en la instalación*, H_φ, se define por la expresión

$$gH_\varphi = g(H_{\varphi s} + H_{\varphi e}) = \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_{s0}^{s} + \left[\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + U\right]_{e}^{e0}. \quad \text{(A.3.33)}$$

En instalaciones de bombeo se define el concepto de *altura geométrica*, H_g, como sigue:

$$gH_g = E_{s0} - E_{e0}, \quad \text{(A.3.34)}$$

con lo que la ecuación (A.3.32), teniendo en cuenta (A.3.5), puede escribirse de la forma[11]

$$H_g = H_m - H_\varphi. \quad \text{(A.3.35)}$$

En instalaciones con turbinas se introduce el concepto análogo de *salto bruto*, H_b:

$$gH_b = E_{e0} - E_{s0}, \quad \text{(A.3.36)}$$

con lo que la ecuación (A.3.32), teniendo en cuenta (A.3.19), puede escribirse de la forma

$$H_b = H_n + H_\varphi. \quad \text{(A.3.37)}$$

A.3.4. Ecuación de Euler

La ecuación de Euler resulta de la aplicación de la ecuación (A.1.11) de conservación del momento cinético al rodete de una turbomáquina, y expresa que el par transmitido entre el rodete y el fluido que circula a través de este es igual a la variación de momento cinético que experimenta el fluido entre las secciones de entrada y salida del rodete por unidad de tiempo. La ecuación (A.1.11), proyectada en la dirección del eje de giro, se aplica al volumen de control limitado por las paredes interiores de la carcasa (si el rodete es abierto), las paredes móviles de los álabes y las superficies de revolución descritas por los bordes de entrada y

[11] Obsérvese que las ecuaciones (A.3.35) y (A.3.37) están incluidas en la ecuación (A.1.16).

salida de los álabes del rodete al girar.[12] La velocidad de la superficie de control, $\boldsymbol{v_c}$, es nula excepto en las paredes móviles (S_m), donde coincide con la velocidad de estas ($\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} = \Omega r \boldsymbol{e}_\theta$). Se elegirá un sistema de referencia fijo a tierra[13] ya que, si bien el movimiento resulta no estacionario, con ello puede suponerse nulo el término [1] de la ecuación (A.1.11).[14] La ecuación (A.1.11), teniendo en cuenta una serie de consideraciones,[15] se transforma en la denominada *ecuación*

[12] No tiene sentido incluir en el volumen de control elementos fijos, tales como distribuidores y difusores con álabes, sobre los que puede ejercerse un par apreciable, si lo que se pretende es determinar el par sobre el rodete en función de las condiciones del flujo en las secciones de entrada y salida de este. No obstante, las secciones de entrada y salida del volumen de control no tienen por qué ser necesariamente las formadas por las superficies de revolución descritas por los bordes de entrada y salida de los álabes del rodete al girar. Podrían utilizarse cualesquiera otras superficies de revolución exteriores al rodete siempre que pudiera suponerse nulo el momento axial ejercido por el fluido sobre las paredes fijas adicionales que aparecerían en la superficie de control.

[13] Con respecto a la elección del sistema de referencia, existen dos opciones. Si se elige el sistema de referencia fijo a tierra, el movimiento es no estacionario y las únicas fuerzas másicas a considerar son las gravitatorias. Si se elige el sistema móvil ligado al rodete, el movimiento es estacionario, pero aparecen fuerzas másicas adicionales debidas al movimiento no uniforme del sistema de referencia: centrífugas y de Coriolis.

[14] Aunque la existencia de superficies móviles en el volumen de control hace que el flujo no sea estacionario, la hipótesis es aceptable si se observa el proceso en una escala de tiempos grande frente al período característico del movimiento de las superficies móviles.

[15] Las consideraciones mencionadas son las siguientes:

1. Debido a la simetría del volumen de control, el momento resultante de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre el fluido es nulo (término [4]).

2. El término [2], proyectado según el eje de giro, tomando como sentido positivo el de giro del rodete, teniendo en cuenta que el flujo convectivo a través de las superficies sólidas del volumen de control es nulo y que en las secciones de entrada y salida S_1 y S_2 la velocidad de la superficie de control $\boldsymbol{v}_c$ es nula, se reduce a

$$\rho \int_{S_2} r_2 v_{u2} v_{n2} \, \mathrm{d}S_2 - \rho \int_{S_1} r_1 v_{u1} v_{n1} \, \mathrm{d}S_1 .$$

   Obviamente, r, v_u y v_n no tienen por qué ser en general uniformes en S_1 y S_2. Los subíndices 1 y 2 en los integrandos no son en realidad necesarios.

3. Para determinar el término restante [3], en primer lugar se supondrá despreciable el momento que ejerce el fluido sobre las paredes fijas que puedan formar parte de la superficie de control. Evidentemente, esta hipótesis no es necesaria cuando se trata de un rodete cerrado. En rodetes abiertos (parcial o totalmente), lo que ocurre es que la ecuación de conservación del momento cinético, estrictamente hablando, y salvo que se haga la hipótesis mencionada, no permite evaluar separadamente los momentos ejercidos sobre el rodete y sobre las superficies fijas. Por otra parte, dado que S_1 y S_2 son superficies de revolución, sobre ellas se ejercen presiones cuyas líneas de actuación cortan al eje de la máquina y que, por tanto, no dan contribuciones al par; en dichas superficies se desprecia además la contribución debida a los esfuerzos viscosos. El término [3], proyectado sobre el eje de giro, se reduce finalmente a $-M_x$, y representa el par de giro que las paredes móviles del rodete (superficie de los álabes y caras internas de los discos) ejercen sobre el fluido, que es igual en magnitud

de Euler:[16]

$$M_x = \rho \int_{S_1} r_1 v_{u1} v_{n1} \, \mathrm{d}S_1 - \rho \int_{S_2} r_2 v_{u2} v_{n2} \, \mathrm{d}S_2. \tag{A.3.38}$$

A.3.5. Relación entre altura útil y variación de momento cinético

La potencia mecánica comunicada por el rodete al fluido,

$$\dot{W}_u = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\Omega} = -M_x \Omega, \tag{A.3.39}$$

puede expresarse en función de la altura útil:

$$\dot{W}_u = \pm \rho Q g H_u, \tag{A.3.40}$$

correspondiendo el signo positivo a bombas y el negativo a turbinas. Teniendo en cuenta estas dos ecuaciones, la ecuación de Euler (A.3.38) puede expresarse,

y de signo opuesto al que el fluido ejerce sobre el rodete, M_x. Debe tenerse presente que M_x incluye contribuciones debidas tanto a la presión como a los esfuerzos viscosos.

[16] Cabe hacer las siguientes aclaraciones acerca de esta ecuación:

1. En su deducción no ha sido necesario hacer referencia a la forma de los álabes del rodete.
2. Tampoco ha sido necesario adoptar la hipótesis de fluido ideal, por lo que la ecuación de Euler es válida tanto para fluidos ideales como reales. Tan solo se han supuesto despreciables los esfuerzos viscosos en superficies fijas, si existen, y en las secciones de entrada y salida. Frecuentemente este punto suele ser fuente de confusión. Según se ha indicado, el par de giro entre fluido y rodete, no solo a través de la superficie de los álabes sino también de las paredes interiores de los discos que delimitan los canales de paso (en máquinas axiales, por ejemplo, sería más apropiado hablar de las superficies del buje y de la carcasa), se debe tanto a fuerzas de presión como a las fuerzas viscosas que aparecen en fluidos reales. Lo anterior no quiere decir que, desde un punto de vista teórico, el comportamiento de una turbomáquina vaya a ser el mismo tanto si se considera el fluido ideal como si se tienen en cuenta efectos viscosos; tan solo significa que un determinado par de giro corresponde a una cierta variación de momento cinético en el fluido, independientemente de si se considera o no rozamiento viscoso. Se verá más adelante que la diferencia de presiones entre las secciones de entrada y salida del rodete, que no interviene en la ecuación de Euler, será distinta según se trate de un fluido ideal o real.
3. La ecuación de Euler puede ser aplicada sin ninguna modificación a sistemas de álabes fijos, tales como distribuidores o difusores con álabes. En la anterior deducción de dicha ecuación para el rodete de una turbomáquina, se ha hecho la simplificación de suponer despreciable el par resultante sobre las superficies fijas que puedan limitar los conductos de paso. Si la ecuación (A.1.11) se aplica a un sistema de álabes fijos, toda la variación de momento cinético del fluido a través del sistema será obviamente debida a la existencia de un par entre el fluido y las paredes fijas. En este caso no se tratará de un par motor o resistente, sino de un par estático que deberá soportar la estructura del sistema de álabes.

en función de la altura útil, de la forma

$$H_u = \pm\frac{1}{gQ}\left(\int_{S_2} u_2 v_{u2} v_{n2}\,\mathrm{d}S_2 - \int_{S_1} u_1 v_{u1} v_{n1}\,\mathrm{d}S_1\right), \tag{A.3.41}$$

correspondiendo el signo positivo a bombas y el negativo a turbinas.

A.3.6. Simplificación de la ecuación de Euler

En la práctica suelen introducirse en la ecuación (A.3.38) hipótesis simplificadoras que permitan una integración explícita. La más frecuente consiste en suponer que la componente axial del momento cinético, $r v_u$, en las secciones de entrada y salida del volumen de control es uniforme en cada una de ellas, lo cual no es siempre aceptable.[17]

La condición de momento angular uniforme en cada una de las secciones S_1 y S_2 permite expresar la ecuación (A.3.38) de la forma

$$M_x = \rho r_1 v_{u1}\int_{S_1} v_{n1}\,\mathrm{d}S_1 - \rho r_2 v_{u2}\int_{S_2} v_{n2}\,\mathrm{d}S_2. \tag{A.3.42}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la masa,

$$Q = \int_{S_2} v_{n2}\,\mathrm{d}S_2 = \int_{S_1} v_{n1}\,\mathrm{d}S_1,$$

se obtiene finalmente

$$M_x = \rho Q(r_1 v_{u1} - r_2 v_{u2}). \tag{A.3.43}$$

De acuerdo con el criterio de signos adoptado, el par de giro M_x ejercido por el fluido sobre el rodete es positivo ($\boldsymbol{M}$ tiene el mismo sentido que $\boldsymbol{\Omega}$) si $r_1 v_{u1} > r_2 v_{u2}$. Un par de giro positivo produce transferencia de energía desde el fluido hacia el rodete, lo que corresponde al funcionamiento de la máquina como turbina. Por tanto, en una turbina, $r_1 v_{u1} > r_2 v_{u2}$. Inversamente, en una bomba, $r_1 v_{u1} < r_2 v_{u2}$. Por otra parte, la ecuación (A.3.38) toma la forma

$$H_u = \pm\frac{u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}}{g}, \tag{A.3.44}$$

o bien, teniendo en cuenta que $w^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\alpha = v^2 + u^2 - 2uv_u$,

$$H_u = \pm\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right). \tag{A.3.45}$$

[17] Esta hipótesis suele ser suficientemente precisa cuando se trata de bombas y turbinas. Generalmente no es correcta en el caso de hélices en flujos no confinados.

En turbomáquinas radiales, la condición de momento angular uniforme en las secciones S_1 y S_2 equivale a suponer uniformes v_{u1} y v_{u2}. Si dicha condición no es admisible, la ecuación (A.3.38) tan solo puede simplificarse para obtener

$$M_x = \rho r_1 \int_{S_1} v_{u1} v_{n1} \, \mathrm{d}S_1 - \rho r_2 \int_{S_2} v_{u2} v_{n2} \, \mathrm{d}S_2. \tag{A.3.46}$$

En turbomáquinas axiales, si no es aceptable la condición de momento angular uniforme, debe retenerse la ecuación (A.3.38). Si se supone que existe simetría axial en el flujo y que la velocidad meridiana es puramente axial, la contribución al par de giro debida a la variación de momento cinético en el volumen diferencial comprendido entre dos superficies cilíndricas circulares coaxiales, separadas una distancia $\mathrm{d}r$, puede expresarse de la forma siguiente:

$$\mathrm{d}M_x = \rho r v_m (v_{u1} - v_{u2}) 2\pi r \, \mathrm{d}r = \rho r (v_{u1} - v_{u2}) \, \mathrm{d}Q, \tag{A.3.47}$$

siendo $\mathrm{d}Q$ el caudal que circula por el elemento de volumen. La contribución a la potencia útil puede expresarse de la forma

$$\mathrm{d}\dot{W}_u = -\Omega \, \mathrm{d}M_x = \pm \rho g H_u \, \mathrm{d}Q. \tag{A.3.48}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente expresión para la altura útil correspondiente a una cascada de álabes de coordenada radial r:

$$H_u = \pm \frac{u(v_{u2} - v_{u1})}{g}. \tag{A.3.49}$$

Obviamente, solo si la componente axial del momento angular es uniforme en S_1 y en S_2 la altura útil obtenida a partir de la ecuación (A.3.49) será constante con r e igual, por tanto, a la altura útil del rodete.

A.3.7. Efecto de número finito de álabes en bombas centrífugas

El flujo relativo en el rodete, aun cuando pueda suponerse que el flujo absoluto es irrotacional, es siempre rotacional debido al efecto de las fuerzas de Coriolis que aparecen como consecuencia del giro del rodete. Esto da lugar a una desviación de la velocidad relativa en la sección de salida, de forma que su dirección no coincide con la de los álabes. Obviamente, la componente acimutal de la velocidad absoluta que existiría con un perfecto guiado del flujo (número infinito de álabes), v_{u2}, también se modifica, y pasa a tomar un valor inferior, v'_{u2}. Se considerará en lo que sigue que el agua entra radialmente en el rodete. La relación entre la altura útil real de la bomba,

$$H_{uz} = \frac{u_2 v'_{u2}}{g}, \tag{A.3.50}$$

y la altura útil que correspondería a una bomba con un número infinito de álabes,

$$H_{u\infty} = \frac{u_2 v_{u2}}{g}, \tag{A.3.51}$$

se denomina coeficiente de disminución de trabajo,

$$\mu = \frac{H_{uz}}{H_{u\infty}} = \frac{v'_{u2}}{v_{u2}}. \tag{A.3.52}$$

Obsérvese que

$$\eta_m = \frac{\eta_{m\infty}}{\mu}, \tag{A.3.53}$$

siendo

$$\eta_{m\infty} = \frac{H_m}{H_{u\infty}} \tag{A.3.54}$$

y

$$\eta_m = \frac{H_m}{H_{uz}}. \tag{A.3.55}$$

Stodola propuso la relación

$$\Delta v_{u2} = v_{u2} - v'_{u2} = \chi u_2, \tag{A.3.56}$$

donde

$$\chi = \epsilon \frac{\pi}{Z} \operatorname{sen} \beta_2, \tag{A.3.57}$$

siendo Z el número de álabes del rodete y ϵ un coeficiente de corrección experimental. Para tener en cuenta la dependencia de ϵ con β_2 y Z, puede utilizarse la tabla siguiente:

Tabla A.1
Coeficiente de corrección de Stodola, ϵ.

	$\beta_2 = 160°$	$\beta_2 = 150°$	$\beta_2 = 140°$	$\beta_2 = 120°$	$\beta_2 = 90°$
$Z = 4 \div 8$	1,1	0,90	0,75	0,60	0,55
$Z = 8 \div 16$	1,15	1,0	0,85	0,70	0,65

La corrección de Pfleiderer[18] se basa en consideraciones distintas de las que conducen a la corrección de Stodola, y consiste en suponer

$$\chi = 2\psi \frac{g H_{uz}}{u_2^2} \frac{1}{Z\left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]}. \tag{A.3.58}$$

[18] Existen otras correlaciones, además de las dos mencionadas aquí, que pueden encontrarse en el texto de Sédille incluido en la sección de bibliografía.

Puede utilizarse, entre otras posibilidades, la siguiente expresión para ψ, que ha sido determinada experimentalmente (y que presenta las mayores discrepancias con los valores experimentales para valores de β_2 alrededor de $\pi/2$):

$$\psi = 0{,}6\,(1 + \operatorname{sen}\beta_2). \tag{A.3.59}$$

A.3.8. Análisis dimensional y semejanza

A.3.8.1. Relaciones entre parámetros adimensionales en bombas

(en máquinas geométricamente semejantes)

$$\frac{\Delta p_t}{\rho\Omega^2 D^2} = \phi_1\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho D^2\Omega}{\mu}\right), \ (\Delta p_t = \rho g H), \tag{A.3.60}$$

$$\frac{\dot{W}}{\rho\Omega^3 D^5} = \phi_2\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho D^2\Omega}{\mu}\right), \tag{A.3.61}$$

$$\frac{M}{\rho\Omega^2 D^5} = \phi_3\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho D^2\Omega}{\mu}\right), \tag{A.3.62}$$

$$\eta = \phi_4\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho D^2\Omega}{\mu}\right) \tag{A.3.63}$$

(obsérvese que $\phi_3 = \phi_2$).

A.3.8.2. Relaciones entre parámetros adimensionales en turbinas

(en máquinas geométricamente semejantes)

$$\frac{Q\rho^{1/2}}{D^2\Delta p_t^{1/2}} = \phi_5\left(\frac{\Omega D\rho^{1/2}}{\Delta p_t^{1/2}}, \frac{(\rho\Delta p_t)^{1/2}D}{\mu}\right), \tag{A.3.64}$$

$$\frac{\dot{W}\rho^{1/2}}{D^2\Delta p_t^{3/2}} = \phi_6\left(\frac{\Omega D\rho^{1/2}}{\Delta p_t^{1/2}}, \frac{(\rho\Delta p_t)^{1/2}D}{\mu}\right), \tag{A.3.65}$$

$$\frac{M}{D^3\Delta p_t} = \phi_7\left(\frac{\Omega D\rho^{1/2}}{\Delta p_t^{1/2}}, \frac{(\rho\Delta p_t)^{1/2}D}{\mu}\right), \tag{A.3.66}$$

$$\eta = \phi_8\left(\frac{\Omega D\rho^{1/2}}{\Delta p_t^{1/2}}, \frac{(\rho\Delta p_t)^{1/2}D}{\mu}\right). \tag{A.3.67}$$

A.3.8.3. Velocidad específica

En bombas:

$$\omega_q = \Omega\,\frac{Q^{1/2}\rho^{3/4}}{(\Delta p_t)^{3/4}}. \tag{A.3.68}$$

En turbinas:

$$\omega_s = \Omega \frac{\dot{W}^{1/2}\rho^{3/4}}{(\Delta p_t)^{5/4}}. \tag{A.3.69}$$

A.3.8.4. Expresiones alternativas para la velocidad específica

(Expresiones no adimensionales; n en rpm, Q en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$, H_m y H_n en m y $\dot{W}$ en CV.)

En bombas:

$$n_q = n \frac{Q^{1/2}}{H_m^{3/4}}. \tag{A.3.70}$$

En turbinas:

$$n_s = n \frac{\dot{W}^{1/2}}{H_n^{5/4}}. \tag{A.3.71}$$

A.3.8.5. Clasificación de bombas y turbinas en función de la velocidad específica

Los rangos de velocidad específica indicados en las Tablas A.2 y A.3 son solo orientativos.[19] Téngase en cuenta que

$$n_s \approx 193\,\omega_s$$

y

$$n_q \approx 53\,\omega_q.$$

[19] Obsérvese que, si se suponen despreciables los efectos viscosos (y el número de Reynolds desaparece, por tanto, de las ecuaciones (A.3.60) a (A.3.67)), en el punto de funcionamiento de máximo rendimiento los parámetros $Q/(\Omega D^3)$ y $\Omega D\rho^{1/2}/\Delta p_t^{1/2}$ quedarán fijados de acuerdo con las ecuaciones (A.3.63) y (A.3.67), respectivamente. Los restantes parámetros que aparecen en los primeros miembros de las ecuaciones (A.3.60) a (A.3.62) y (A.3.64) a (A.3.66) quedarán entonces también fijados para un conjunto de máquinas geométricamente semejantes en el punto de máximo rendimiento. Compruébese que los parámetros ω_q y ω_s, expresados en las ecuaciones (A.3.68) y (A.3.69), son combinaciones de algunos de los parámetros que aparecen en las ecuaciones (A.3.60) a (A.3.67), y tienen la particularidad de que en ellos no aparece el diámetro de la máquina. Según lo anterior, dichos parámetros adimensionales, correspondientes a las condiciones de máximo rendimiento y denominados cada uno de ellos velocidad específica, serán también iguales para máquinas geométricamente semejantes. (Lógicamente, sí puede ocurrir que dos máquinas geométricamente diferentes tengan la misma velocidad específica, aunque esto no es probable si sus características geométricas difieren sustancialmente.) La velocidad específica caracteriza pues la geometría de una turbomáquina, pudiéndose clasificar los distintos tipos de bombas y turbinas en función de su velocidad específica. A pesar de que la velocidad específica se determina a partir de las condiciones de funcionamiento correspondientes al punto de máximo rendimiento de la máquina, y no tiene sentido decir que cambia al variar las condiciones de funcionamiento de esta, sí cabe utilizar los parámetros ω_s y ω_q definidos a partir de magnitudes no correspondientes al punto de funcionamiento de máximo rendimiento, si bien debe tenerse en cuenta lo que se acaba de explicar para evitar confundir conceptos.

Tabla A.2
Rangos de velocidad específica en bombas.

Tipo de bomba	n_q
Radial lenta	10–25
Radial normal	25–38
Radial rápida	38–82
Helicocentrífuga	82–160
Axial	160–600

Tabla A.3
Rangos de velocidad específica en turbinas.

Tipo de turbina	n_s
Pelton lenta[20]	2–30
Pelton normal	30–50
Pelton rápida	40–65
Francis lenta	50–125
Francis normal	125–225
Francis rápida	225–500
Kaplan lenta	350–600
Kaplan rápida	600–800
Kaplan ultrarrápida	800–1000

[20] Las turbinas Pelton lentas suelen tener un rodete y 1 ó 2 chorros. Las de velocidad media generalmente tienen 1 rodete y varios chorros ó 2 rodetes. Las rápidas son turbinas de 2 rodetes y varios chorros.

Índice alfabético

A

Acoplamiento de bombas
en paralelo, 17, 22, 31-32, 67
en serie, 20, 21, 30 - 32
Aerogenerador, 141, 146, 150, 152 153, 156, 158, 159
Aeroturbina, 140 - 161
Alternador, *véase* Generador eléctrico
Altura de aspiración
de una bomba, 46, 49 - 51
de una turbina, 28 - 30
Altura de pérdidas en la instalación, 19, 169, 178
Altura de pérdidas internas
en bombas, 40, 54 , 173
difusor, 43, 54
rodete, 39, 43, 54
voluta, 39, 40, 43, 54
en turbinas, 83, 176
difusor, 21, 87, 89, 108, 112
distribuidor, 87
rodete, 86, 87
voluta, 87
Altura geométrica, 19, 178
Altura manométrica, 23, 25, 34-36 39, 42, 44, 45, 47, 51-55 169, 173, 175
Altura neta de succión
disponible, 49, 59, 60
requerida, 45, 49, 51, 58,59
Altura útil, 180 - 182
de una bomba, 39, 41, 45 - 48, 60 61, 73, 74, 76, 173, 175, 183
para número finito de álabes, 35, 45, 48, 57, 61, 62, 69, 71 72, 74, 76, 79, 182
de una cascada de álabes, 105 182
de una turbina, 93, 96, 98 99, 101,105, 107, 114 116, 117, 121, 122, 133, 139
Ángulo de ataque sobre un perfil, 109, 113, 115, 117, 119 148, 149, 151, 157
Ángulo de paso de una pala, 146 152, 156 - 158
Ángulo de torsión de un elemento de pala, 148, 149
Área efectiva de paso entre álabes, 48, 89
Atmósfera neutra, 140, 141

B

Bernoulli, ecuación de, 124, 134
Betz, límite de, 148, 159, 161

Bomba centrífuga, 23, 26, 34-78 182, 183
Bomba multietapa, *véase* Etapas de una bomba

C

Canal de descarga, 27,-29, 90 96, 97, 100, 108, 110
Cascada de álabes, 105, 121, 182
Caudal de fugas
en bombas, 174
externo, 45-47
interno, 46, 56, 67
en turbinas, 176
Caudal nominal, 44, 57, 73-75, 77 129
Cavitación
en una bomba, 49, 58-60
en una turbina, 21, 22, 27-29 108, 112
Chorro
de descarga en un depósito, *véase* Pérdida de carga local en una instalación
de una turbina Pelton, 123-133 135, 137-139, 186
Coeficiente característico de velocidad en turbinas, 125, 127
Pelton, *véase* Coeficiente de velocidad en el inyector de una turbina Pelton
Coeficiente de disminución de trabajo, 34, 35, 43, 48, 51, 52, 54 56, 61, 62, 67, 69, 70, 73, 78 183
Coeficiente de potencia de una aeroturbina, 142, 146, 148, 153 154, 159, 161
Coeficiente de pérdida de carga local, 45, 50, 58-60, 67, 68, 170 171
Coeficiente de velocidad en el inyector de una turbina Pelton, 125, 127, 130, 132-134, 137
Coeficiente de velocidad inducida axial en una aeroturbina, 143, 148, 158, 160
Coriolis, fuerza de, *véase* Fuerza másica
Curva característica
de un acoplamiento de bombas, 17, 18, 20, 21, 30, 32
de una bomba, 17-21, 30, 31, 42 43, 50, 53, 56, 58, 59, 67-69 73, 74, 77-81
ideal de una bomba, 57, 74
de una instalación, 42, 51, 56 68, 79-81

D

Diagrama de Moody, 131, 170, 171
Difusor, 179, 180
de una bomba, 43, 44, 46, 48 51-54, 63-66, 70-73
de una turbina, 21, 22, 27-30 86-90, 95-97, 100, 108 112
rendimiento de un, *véase* Rendimiento
Disco actuador
modelo del, 142, 157
Distribuidor, 83-85, 87-90, 93, 95 98, 100-102, 105-107 109-117, 119, 120, 180

E

Ecuaciones de conservación, forma integral
cantidad de movimiento, 166
energía, 167, 168

en máquinas de fluidos, 172
energía interna
flujo incompresible, 168
en máquinas hidráulicas, 169 172 energía
mecánica
flujo incompresible, 168
en máquinas hidráulicas, 169, 170, 172
masa, 165
en máquinas hidráulicas, 181
momento cinético, 167
en máquinas hidráulicas, *véase* Euler (turbomáquinas), ecuación de
Ensayo de un modelo de bomba, 23, 25, 26
Estela de un aerogenerador, 158, 160
Etapas de una bomba, 44
determinación del número de, 32
Euler (turbomáquinas), ecuación de, 36, 37, 39, 44, 47, 61, 69 84, 85, 87, 92, 120, 121, 124 134, 173, 178, 180-182
en máquinas de flujo axial, 182
en máquinas de flujo radial, 182

F

Factor de capacidad de un aerogenerador, 152-154, 156
Factor de fricción en una tubería, 38 45, 55, 87, 170, 171
Factor de utilización de un aerogenerador, 142, 153-155
Flujo incompresible, 168-170
Flujo irrotacional, 182
Frecuencia
de la red eléctrica, 125, 135, 148
Fuerza centrífuga, *véase* Fuerza másica
Fuerza de superficie, 166-168, 180
Fuerza másica
debida a aceleración uniforme del sistema de referencia, 167
centrífuga, 167, 179
de Coriolis, 167, 179, 182
gravitatoria, 167
potencial de, 168
Función de densidad de probabilidad de la velocidad del viento, 141, 153, 155
Función de disipación viscosa, 168 169
Función de distribución de probabilidad de la velocidad del viento, 141, 142, 153, 155

G

Generador eléctrico, 98, 147, 152 153
Grupo bulbo, *véase* Turbina tubular

I

Intensidad de la turbulencia, 140, 141

M

Manómetro de mercurio, 45
Momento de la fuerza de empuje sobre una aeroturbina, 150 151
Momento en el eje, *véase* Par en el eje
Motor eléctrico de accionamiento de una bomba, 42, 44, 54, 61 71, 174
Multiplicador, 147, 152 *véase* Relación de transmisión, *véase* Rendimiento (turbinas)

N

NPSH, *véase* Altura neta de succión
Número de pares de polos del alternador, 112, 125, 135, 136 147, 148
Número de álabes, 46, 48, 49, 51, 183

P

Par en el eje, 35, 36, 45, 63-65, 157 179-181
Parque eólico, 154, 155
Pérdida de carga
en conductos, 38, 45, 50, 55, 87 88, 170
local en una instalación
chorro descargando en un depósito, 22, 50, 55, 60, 67, 88 97
en diversos elementos, 55, 58 60, 67, 180
en una válvula, 32, 45, 50, 59
Pérdidas de energía en una máquina, *véase* Altura de pérdidas internas
por choque, 37, 51-53, 57, 67 73, 74, 123, 124, 137
por fricción, 53, 57, 73, 123, 124 133, 137
Pfleiderer, corrección de, 54, 73, 75 183
Potencia de pérdidas hidráulicas en una turbomáquina, 172-174, 184
Potencia eléctrica, 42, 44, 54, 61 71, 95, 98, 108, 117, 129 134, 135, 142, 148, 152 154, 156, 157
Potencia en el eje, 21, 22, 28, 50, 56 65, 67, 68, 78-81, 84, 86, 90 92, 94, 114, 130, 133, 134 137, 146-148, 153, 154 159, 161, 174, 175, 177
Potencia nominal, 95, 127, 134 135, 147, 148, 152, 154, 157
Potencia total, *véase* Potencia en el eje
Potencia útil, 34-36, 53, 60, 90, 93 125, 127-129, 174-177, 182
Presión de vapor, 28, 45, 51, 58, 108
Punto de funcionamiento
de máximo rendimiento, 185
de una bomba, 18, 23, 26, 27, 38 41-43, 45, 61, 77, 79
con altura manométrica máxima, 75
con altura manométrica nula, 53
con caudal nulo, 52
de máximo rendimiento, 74
modificación, 78
nominal, 70, 77
de una turbina, 23, 94, 119
de máximo rendimiento, 94 112

R

Rayleigh, distribución de, *véase* Función de distribución de probabilidad de la velocidad del viento
Regulación de una turbina, 101, 109 113, 117, 119, 137
Relación de transmisión del multiplicador, 147, 148, 152
Rendimiento
(bombas)
del motor eléctrico de accionamiento, 42, 54, 61, 71
manométrico, 36, 39, 42, 46 48, 51-53, 55, 56, 60-63, 70

74, 76, 79, 81, 175
orgánico, 42, 43, 46, 49, 54 61, 63, 67, 70, 78, 174
total, 44, 46, 48, 51, 54, 174 175
volumétrico, 37, 42, 43, 45, 47 54, 61, 63, 66, 70, 78, 175
(turbinas)
del difusor, 28
del generador eléctrico, 98 108, 130, 134, 135, 141 147, 148, 153, 154
hidráulico, 83, 84, 87, 90 93, 94, 96, 97, 100-103 106-108, 117, 119 121 124, 127, 129, 132, 137 175, 177
orgánico, 84, 86, 87, 90, 92 94, 98, 100, 108, 112 113, 117, 133, 134, 137 141, 147, 154, 177
orgánico (del multiplicador, en aeroturbinas), 147, 148 153, 154
total, 21, 27, 87, 108, 112, 129 134, 177
volumétrico, 84, 86, 87, 90 92, 94, 98, 100-102, 108 112, 113, 117, 124, 127, 177
Rendimiento total de un aerogenerador, 152, 154
Reynolds, número de, 18, 171, 185

S

Salto bruto, 87, 88, 100, 130, 134 139, 178
Salto neto, 21-23, 28, 85-89, 93 94, 96, 100, 101, 106 108, 112, 113, 117, 124 129, 132, 133, 138, 139 169, 175, 176
Salto útil, *véase* Altura útil de una turbina, 87, 92, 124, 132 173, 175, 176
Semejanza
física, 17, 18, 23-27, 44, 78, 184
geométrica, 185,
Sistema de control de potencia, 152 156, 157
Socaz, *véase* Canal de descarga
Stodola, corrección de, 46, 48, 50, 51 57, 183
Superficie de control, 167, 168, 179
Superficie libre
en el canal de descarga, 22, 28 29, 90, 96, 97, 100
en un depósito, 19, 42, 49, 50, 55, 56, 58-60, 67, 68, 78
en un embalse, 137

T

Teoría unidimensional de turbomáquinas, 45, 48, 61, 143
Thoma, coeficiente de cavitación, 27 29
Tiempo de llenado de un depósito, 19
Tren de potencia de un aerogenerador, 152
Triángulo de velocidades
en bombas
sección de entrada al difusor, 48, 72
sección de entrada al rodete, 56, 62, 72, 74, 75, 77
sección de salida del rodete, 36, 37, 54, 56, 69, 74-77, 79
en turbinas
sección de entrada al rodete, 84, 85, 91, 93, 96, 98

101-103, 107-109, 112-114, 116, 117, 119, 120 122,139
sección de salida del distribuidor, 102, 107, 110, 116, 120
sección de salida del rodete, 85, 87, 91, 92, 97-99, 102, 104, 107-109 112, 114, 116, 117, 119-122, 124, 132, 136
Tubería
de aspiración, 19, 45, 50, 51, 54-56, 58, 60, 67
forzada, 21, 27, 87-89, 134 137-139
de impulsión, 38, 45, 46, 50, 51 54-56, 58, 60, 67, 79
Tubo de aspiración, *véase* Difusor de una turbina
Tubo de corriente, 143-145, 159
Turbina
Francis, 84-104
de doble rodete, 95
Kaplan, 105-122
Pelton, 123-139
tubular, 119

V

Velocidad de fricción turbulenta, 140, 141
Velocidad de sincronismo, 148
Velocidad del viento
de arranque, 141, 153
de parada, 141, 146
nominal, 146, 147, 157
Velocidad específica, 184, 185
en bombas, 25, 32, 33, 44, 46, 49, 51, 184-186
en turbinas, 23, 29, 94, 95 97, 100, 117, 125, 127-130, 147, 185, 186
Viscosidad
efectos de, 169, 173, 176
despreciables, 18, 24-26, 172
Volumen de control, 144, 145, 160 165-169, 172, 178, 179, 181
Voluta
de una bomba, 39, 40, 43, 54, 70 71
de una turbina, 21, 27, 28, 87 95, 100
Válvula antirretorno en acoplamiento de bombas, 31, 32

W

Weibull, distribución de, *véase* Función de distribución de probabilidad de la velocidad del viento

UNED Editorial

Juan del Rosal, 14
28040 MADRID
Tel. Dirección Editorial: 913 987 521